UNIVERSITÉ PARIS VII - DENIS DIDEROT

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Informatique théorique

Soutenue le 28 novembre 2001
par
Laurent VUILLON

Mots infinis, suites doubles et pavages

Rapporteurs :
Mireille BOUSQUET-MÉLOU
Claire KENYON
Rob TIJDEMAN
Maurice NIVAT

Composition du jury :
Jean BERSTEL
Mireille BOUSQUET-MÉLOU
Claire KENYON
Daniel KROB
Jean-François MAURRAS
Maurice NIVAT

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Maurice Nivat qui depuis maintenant plus de quatre ans me fait part de problèmes d'informatique théorique et de pavages. Le renouvellement de ses réflexions ainsi que sa puissance de travail m'impressionnent considérablement. Au-delà des pavages, nous avons abordé de nombreux champs de recherches comme la tomographie discrète et la géométrie discrète. Notre rencontre a sans nul doute influencé en profondeur mes thèmes de recherche et ma manière même de chercher. Je le remercie également pour son travail de rapporteur sur mon habilitation.

Je tiens également à remercier Jean Berstel qui est mon deuxième maître à penser. Je suis d'ailleurs heureux qu'il fasse partie du jury de mon habilitation. De plus, depuis notre rencontre lors de ma thèse, il a toujours considéré mes travaux avec bienveillance. Nos discussions ont été très enrichissantes et sont à la base de plusieurs théorèmes sur les mots de Sturm et leurs généralisations. Je lui suis infiniment reconnaissant aussi de m'avoir suggéré au printemps 1997 de présenter un dossier d'ATER à Paris VII. Cette suggestion est à l'origine d'un enchaînement d'événements positifs tels que mon intégration au LIAFA, suivie de l'obtention de mon poste de maître de conférences à Paris VII.

Je remercie aussi Mireille Bousquet-Mélou d'avoir accepté la tâche de rapporteur. J'ai apprécié le soin et l'efficacité avec lesquels elle a effectué ce travail.

Je remercie pareillement Claire Kenyon pour son travail de rapporteur. J'ai été sensible à ses commentaires directs mais souvent très pertinents.

Rob Tijdeman a lui aussi mis beaucoup de coeur pour écrire son rapport sur mon habilitation. Je suis d'ailleurs honoré de l'accueil à la fois amical et sans concession qu'il a toujours réservé à mes résultats.

Je suis heureux que Daniel Krob soit présent dans le jury d'habilitation. En tant que directeur du LIAFA, il m'a accueilli dans son laboratoire et m'a donné les moyens de mener à bien mes recherches. En particulier en favorisant les contacts au sein des équipes du LIAFA et en invitant de nombreux chercheurs internationaux. L'ambiance et l'environnement porteur font du LIAFA un laboratoire très agréable pour la vie scientifique.

Je remercie Jean-François Maurras d'avoir accepté de faire partie du jury. Je pense qu'il appréciera les aspects géométriques de mes recherches et que j'aurai le plaisir de travailler avec lui sur des problèmes communs.

De vifs remerciements vont à Jean-Paul Allouche qui est à mes yeux un grand esprit. Sa capacité de travail, ses grandes connaissances mathématiques (et autres) sont un modèle. Je suis en particulier sensible à la constance de son soutien et de son amitié.

Je tiens à remercier Jean Mairesse avec lequel j'ai partagé mon bureau pendant plus de trois ans. C'est un chercheur pugnace et créatif qu'attend sans doute une carrière à son image. Nous avons durant cette période souvent parlé de mathématiques et de sujets communs. Mais la plus grande joie a été de vivre presque simultanément les événements précédant et prolongeant les naissances de son fils Emmanuel et du mien, Valentin. Nous avons échangé nos impressions sur la paternité, ainsi que sur des aspects plus matériels de cette expérience inédite.

Christophe Prieur aussi tient une place particulière dans cette période de ma vie. J'ai partagé pendant un an son bureau lors de mon arrivée comme ATER au LIAFA. Par son amitié, il m'a permis de m'intégrer facilement dans le groupe des thésards et ATER de notre laboratoire. J'ai pu apprécier chez lui de grandes qualités humaines et je me réjouis de son recrutement comme maître de conférences à Paris 7.

J'exprime ma gratitude à Michel Morvan. En effet, en tant que directeur de l'équipe « Algorithmique et Combinatoire », il a toujours entretenu une bonne ambiance entre les membres de l'équipe. Il m'a aussi fait prendre conscience des liens entre théories des ordres et pavages. Liens qui ont donné lieu à un courant de recherche prometteur au sein du LIAFA.

J'aimerais remercier Christiane Frougny pour m'avoir facilité des contacts avec l'équipe « Automates » du laboratoire. J'apprécie ses thèmes de recherches, sa droiture et son amitié. Elle a toujours été disponible pour parler de mathématiques ou bien pour me prodiguer des conseils d'ordre plus général.

Christian Choffrut est à mon sens un élément fondamental du laboratoire. Outre nos échanges pour la préparation des TDs d'infographie, ses avis sur de nombreux sujets mathématiques ou administratifs m'ont orienté dans mes choix et je l'en remercie.

Je tiens à remercier Anca Muscholl pour l'apprentissage de la gestion de l'IUP « Génie Mathématique et informatique » de Paris 7. Les aspects administratifs de sélection de dossiers, gestion des étudiants, jurys, maquette... ont complété ma formation d'enseignant-chercheur. Nos échanges ont toujours été très instructifs et je la remercie aussi de la confiance qu' elle m'a accordée pour la direction de la deuxième année d'IUP.

Les conseils de Paul Gastin ont eux aussi été important pour mes choix et je l'en remercie. Sa rigueur en tant que directeur de l'UFR est pour moi un modèle.

Les personnels administratifs sont très importants pour la bonne marche d'un laboratoire ou d'une UFR. Je remercie donc Noelle Delgado pour sa présence et son efficacité, les ingénieurs systèmes Sami Zoubir et Laifa Hamadi pour leurs nombreux conseils. Maguy Enguienta et Dominique Raharijesy pour leur bonne humeur et les longues heures passées devant APOGEE ! Stéphane Villain qui m'a souvent sensibilisé aux problèmes de fonctionnement d'une UFR. Et Jean-Michel Moreno qui allie professionnalisme et poésie dans la gestion du réseau informatique de Jussieu.

Je tiens à remercier Julien Cassaigne et Sébastien Desreux pour leur lecture très attentive de la première version de ce document. Leurs commentaires et suggestions m'ont beaucoup aidé. Je remercie également mes amis de l'IML Gérard Rauzy, Valérie Berthé, Pierre Arnoux et Pascal Hubert qui ont toujours témoigné de l'intérêt pour mes travaux.

J'ai beaucoup apprécié les discussions avec Rached Mneimné, Serge Grigorieff et Jean-Marie Rifflet. Ils ont tous les trois des discours philosophiques enrichissant sur la vie en général et l'université en particulier. Je les remercie aussi pour leur amitié.

La rencontre avec Jacques Justin fut une chance. C'est un grand spécialiste des mots de Sturm et nos échanges ont été formateurs. Je suis d'ailleurs honoré de faire parti de ses co-auteurs.

Je remercie enfin les collègues et amis de mon environnement scientifique : Matthieu Latapy, Clémence Magnien, Alain Daurat, Yan Gérard, Ian Gambini, Sylvain Lombardy, Isabelle Fagnot, Peter Habermehl, Ha Duong Phan, Roberto Mantaci, Jean-Batiste Yunes, Marc Zeitoun, Thierry Bousch, Frédérique Bassino, Olivier Carton, Jean-Christophe Novelli, Olivier Bodini, Pierre-Cyrille Héam, Stéphane Vialette, Jean-François Antoniotti, Vincent Padovani, Vincent Ballat, Ines Klimann, Dominique Rossin, Frédéric Chavanon et Gilles Radenne.

Cette liste serait incomplète sans un grand merci à ma famille; en particulier à mes parents et aux Olivades.

À ma Yoyo et mon Valentin

Introduction générale

Les thèmes abordés dans la présente synthèse de mes recherches se situent à la frontière de l'informatique théorique et des mathématiques discrètes. Ayant pour fil conducteur les pavages de la droite et du plan, ce document présente des domaines comme la combinatoire des mots unidimensionnels et bidimensionnels, l'application des systèmes dynamiques discrets à la dynamique symbolique ainsi que des techniques de géométrie discrète. Le codage de pavages par des mots constitue la base de ce travail. Ce codage s'est avéré fructueux car il enrichit à la fois la théorie des pavages et la combinatoire des mots. Il faut noter que cette façon de regarder les pavages a été initiée par Rauzy lors de la direction de ma thèse de doctorat au Laboratoire de Mathématiques Discrètes de l'Université d'Aix-Marseille II. étant depuis 4 ans au Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications de l'Université de Paris VII, j'ai dès lors intégré une nouvelle culture de laboratoire et appliqué des techniques symboliques à plusieurs domaines de l'informatique théorique. Mon travail porte donc essentiellement sur l'étude de la combinatoire des mots unidimensionnels et bidimensionnels.

On trouvera à la suite le plan de ce document avec à chaque chapitre la nature de ma contribution.

Le premier chapitre est une introduction sur les méthodes de constructions des pavages de la droite et du plan. Plus précisément, nous examinons d'abord les pavages périodiques puis les pavages non périodiques obtenus par la méthode de coupe et projection.

Le second chapitre présente divers aspects des pavages de la droite. Sont abordés les codages d'approximation de droite et les liens avec les mots de Sturm. Nous détaillons d'abord plusieurs caractérisations des mots de Sturm de nature combinatoire, géométrique et arithmétique. Nous présentons aussi les liens entre mots équilibrés et problèmes d'ordonnancement. Ensuite, nous évoquons les méthodes qui permettent de construire des mots infinis à l'aide de systèmes dynamiques. Nous étudions aussi la combinatoire des mots unidimensionnels faisant intervenir les palindromes et les mots de retour.

Par ordre d'apparition dans le texte, ma contribution à ce domaine très actif de la « combinatoire des mots » est :

- une généralisation de l'équilibre dans les mots de Sturm ([66] I. Fagnot and L. Vuillon, *Generalized balances in Sturmian words*, Discr. Appl. Math.),
- une nouvelle caractérisation des mots de Sturm par mots de retour ([174] L. Vuillon, *A characterization of Sturmian words by return words,* European J. Combin.),
- un travail sur les propriétés symboliques des échanges d'intervalles ([175] L. Vuillon, *On the number of return words in infinite words with complexity* $2n+1$*,* Prépublication du LIAFA),
- une étude des mots d'Arnoux-Rauzy et des mots épisturmiens ([95] J. Justin and L. Vuillon, *Return words in Sturmian and episturmian words,* RAIRO Theoret. Inform. Appl.).

Le chapitre 3 consiste en l'étude du recodage de pavages du plan provenant de la méthode de coupe et projection. En particulier les suites doubles sont introduites pour permettre d'étudier les propriétés combinatoires de ces pavages. Ce domaine récent et en pleine expansion cherche à relier les propriétés combinatoires des suites doubles et les systèmes dynamiques.

Mon apport à cette approche est :

- le recodage de l'approximation de plan par une suite double sur 3 lettres et le dénombrement de mots triangulaires ([172] L. Vuillon, *Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle,* Theoret. Comput. Sci.),
- l'utilisation des systèmes dynamiques pour construire les pavages provenant d'approximation de plan, l'étude du dénombrement et de la fréquence des mots rectangulaires ([23] V. Berthé and L. Vuillon, *A two-dimensional generalization of Sturmian sequences: tilings and rotations*, Discrete Math.),
- l'étude du lien entre les systèmes dynamiques et les propriétés combinatoires de suites doubles de faible complexité ([24] V. Berthé and L. Vuillon, *Suites doubles de basse complexité*, J. Théor. des Nombres de Bordeaux),
- le lien entre les plans discrets et les suites doubles de complexité $2mn$ ([173] L. Vuillon, *Local configurations in discrete planes*, Bull. Belg. Math. Soc.),
- l'étude des palindromes bidimensionnels donnant la caratérisation de certaines classes de suites doubles de faible complexité ([25] V. Berthé and L. Vuillon, *Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences*, J. Autom. Lang. Comb.).

Le chapitre 4 présente une synthèse sur les pavages d'une partie bornée du plan. Plus précisément sont abordés les fonctions de hauteurs, les partitions planes, la dynamique des pavages et les codages de zonotopes. Ma participation à ce domaine consiste en un travail en cours avec mon élève F. Chavanon et M. Latapy sur le codage des pavages de zonotopes à partir des graphes duaux.

Le dernier chapitre porte sur des modèles hybrides à la frontière entre pavages, mots unidimensionnels et bidimensionnels. Ces modèles donnent une façon originale d'étendre l'étude des mots de Sturm et des pavages. De plus, les méthodes employées dans ce chapitre proviennent de la théorie des automates.

Ma contribution à cette approche est :

- un travail sur le recodage de k mots de Sturm en un mot sur k lettres à l'aide d'un transducteur universel. Cet article fait le lien entre mots rectangulaires et mots unidimensionnels ([19] J. Berstel and L. Vuillon, *Coding rotations on intervals*, Theoret. Comput. Sci.).
- l'étude des tas de pièces comme arrangement à deux dimensions de pièces selon le jeu Tetris. Le tas de pièces avec 2 pièces le plus compact possible est donné par un mot périodique équilibré ou bien par un mot de Sturm ([125] J. Mairesse and L. Vuillon, *Asymptotic behavior in a Heap Model with Two Pieces*, Theoret. Comput. Sci.).

  Les articles peuvent être chargés à l'adresse suivante :
  `http://liafa.jussieu.fr/~vuillon`

Table des matières

1 Pavages du plan

Ce premier chapitre est une introduction sur les méthodes de constructions des pavages de la droite et du plan. Plus précisément, nous examinons d'abord les pavages périodiques puis les pavages non périodiques obtenus par la méthode de coupe et projection. Cette introduction montre bien la nature pluridisciplinaire de l'étude des pavages. Nous présenterons au fil du texte des thèmes liés à l'informatique, comme par exemple l'application des méthodes de géométrie discrète en infographie ou bien l'utilisation de concepts de l'informatique provenant de la théorie des langages et de la combinatoire des mots.

1.1 Pavages périodiques

Un *pavage du plan* (ou de $\mathbb{R}^d$) consiste à recouvrir le plan (ou $\mathbb{R}^d$) par translation de copies de tuiles appartenant à un ensemble T de tuiles (encore appelées pavés ou pièces) de telle sorte que les tuiles soient deux à deux disjointes et qu'il n'y ait pas de trou dans le pavage. Des parties bornées de pavages du plan sont présentes dans de nombreuses cultures. On a ainsi de beaux exemples de pavages en Espagne dans l'art musulman à l'Alhambra de Grenade et à Mérida dans les villas romaines. On en trouve certainement aussi dans votre salle de bain. La majorité des pavages représentés par l'homme sont des parties bornées de pavages doublements périodiques, c'est-à-dire qu'il existe deux vecteurs non colinéaires et non nuls qui laissent invariant le pavage (un pavage est invariant par une application du plan (ou de $\mathbb{R}^d$) dans lui-même si le pavage et l'image du pavage par cette application sont identiques). Dans la nature, les pavages périodiques apparaissent naturellement dans la structure des agencements d'atomes et lors de la formation de cristaux. Les cristallographes ont depuis longtemps étudié les pavages périodiques du plan ou de l'espace en les classant par groupes cristallographiques [158, 87]. Ces groupes font intervenir les isométries suivantes : translations, rotations, symétries axiales, symétries centrales et glissements. Cependant, dans le cadre de ce travail, nous considérerons uniquement des pavages construits à l'aide d'un ensemble fini de tuiles et de translations de copies de ces tuiles.

La classification utile pour cette étude ne fera donc intervenir que l'invariance par translation d'un pavage. Elle se présente en trois points :

- Si un pavage de $\mathbb{R}^d$ est invariant par translations de vecteurs éléments d'une base de $\mathbb{R}^d$, alors le pavage sera dit *régulier* (ou encore d-périodique).

- Si un pavage de $\mathbb{R}^d$ est invariant par translations de vecteurs éléments d'une base de $\mathbb{R}^k$ $(k < d)$, alors le pavage sera dit *k-périodique*.
- Un pavage sera dit *non-périodique* s'il n'existe pas de translation qui laisse invariant le pavage.

Par exemple, et conformément à la classification précédente, un pavage du plan (donc de $\mathbb{R}^2$) est soit régulier, soit 1-périodique, soit non-périodique.

Le but de notre recherche est de développer des outils afin d'étudier la structure des pavages et en particulier de donner des informations sur la combinatoire des pavages et sur la forme des tuiles. Dans cette optique, les pavages les plus simples sont construits à partir d'une seul tuile. Les questions que l'on se pose alors spontanément sur ces pavages sont les suivantes :

- Si une tuile pave le plan par translation de copies de cette tuile, a-t-on des informations sur la forme de la tuile ?
- Le pavage ainsi obtenu peut-il être non-périodique ?
- Est-il au moins 1-périodique ?

Beauquier et Nivat dans [11] ont répondu à toutes ces questions.

Ils définisent la notion de *pseudo-hexagone*, c'est-à-dire une tuile telle que le bord soit l'union de six côtés deux à deux identifiables par translation (voir la figure 1). Ils montrent pour des tuiles à bord rectifiables (i.e. une tuile de périmètre fini) le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Beauquier, Nivat) *Une tuile t simplement connexe à bord rectifiable pave le plan par translation de copies de t si et seulement si la tuile t est un pseudo-hexagone.*

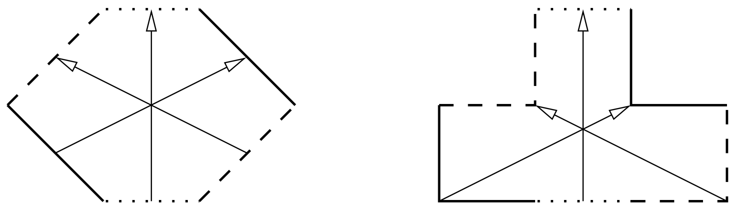

FIG. 1 – Pseudo-hexagones.

Il faut noter qu'il existe des pseudo-hexagones avec des bords non rectifiables (voir par exemple le fractal de Rauzy figure 19).

Dans notre cas, les pièces suivantes sont des pseudo-hexagones (voir la figure 2). On remarque que la première pièce donne un seul pavage 2-périodique alors que la seconde donne une infinité de pavages: exactement deux pavages 2-périodiques et une infinité de pavages 1-périodiques. En d'autres termes, le premier pavage est rigide. Il n'a pas de degré de liberté alors que le second a un degré de liberté. On peut faire bouger des bandes de pavés dans la direction (1,1) et ainsi trouver un pavage différent du pavage de départ. C'est-à-dire qu'en partant d'un pavage 2-périodique, on arrive à perturber ce pavage afin de casser une des directions de périodicité.

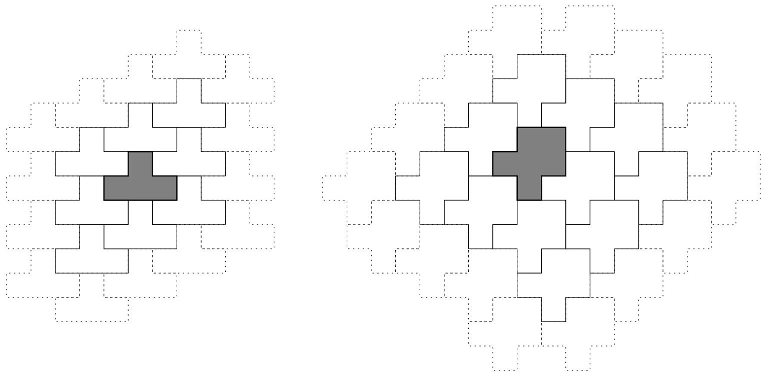

FIG. 2 – Deux pavages du plan.

Peut-on maintenant casser les deux directions de périodicité ? Dans une deuxième partie du théorème, [11] affirme que :

Théorème 1.2 (Beauquier, Nivat) *Si l'on pave le plan par un pseudo-hexagone alors le pavage obtenu est invariant par au moins une translation (le pavage est au moins 1-périodique).*

Ce théorème montre bien le genre de résultat que nous recherchons : d'une part, nous nous intéressons à des propriétés locales comme la forme des tuiles et l'agencement de parties bornées du pavage. D'autre part, nous nous intéressons aux propriétés globales induites par des propriété locales : typiquement, le fait de paver le plan par un pseudo-hexagone implique que le pavage a au moins une direction de périodicité.

1.2 Pavages non périodiques

Dans la partie précédente, nous avons construit des pavages du plan réguliers ou 1-périodiques à partir de tuiles qui sont des pseudo-hexagones. Nous allons maintenant aborder le monde des pavages non périodiques.

1.2.1 Coupe et projection

En 1974, Meyer a inventé une méthode pour construire des familles de pavages. Cette méthode est toujours très étudiée par les physiciens, en particulier parce qu'elle permet d'obtenir le fameux pavage de Penrose [132]. Ce pavage non périodique du plan construit par Penrose présente une symétrie de rotation d'ordre 5, ce qui est formellement interdit par la théorie des groupes cristallographiques [154, 158]. En effet, les cristallographes savaient depuis longtemps qu'il ne pouvait pas exister de pavage périodique du plan invariant par rotation de $\frac{2\pi}{5}$. Or en 1984, Gratias et ses co-auteurs [156] ont découvert lors d'une expérience un matériau formé d'arrangements d'atomes d'aluminium et de manganèse avec une symétrie d'ordre 5. En fait, la surface des échantillons observés ne peut être directement étudiée. L'observation s'effectue par le biais de la transformée de Fourier de la position des atomes. Comme la transformée de Fourier avait une symétrie d'ordre 5, cela implique que l'arrangement des atomes sur la surface avait lui aussi cette symétrie. Dès lors le pavage de Penrose a été considéré par les physiciens comme un bon modèle pour ce que l'on a appelé les quasi-cristaux. Il faut noter que Penrose a découvert son pavage en 1979 et que donc la construction mathématique a précédé la découverte des quasi-cristaux par les physiciens.

Nous allons maintenant exposer une version simplifiée de la méthode de Meyer pour construire des quasi-cristaux, appelée par les physiciens la méthode de *coupe et projection* (voir par exemple le livre de Senechal [154]).

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^d$ muni d'un repère orthonormé et l'on considère un hypercube unité de cet espace. En prenant comme point de référence le centre de l'hypercube, un plan épais est alors construit en translatant l'hypercube le long d'un plan (de dimension 2) de $\mathbb{R}^d$. Ensuite, les points à coordonnées entières de $\mathbb{R}^d$ contenus dans le plan épais sont sélectionnés (on note PCE cet ensemble de points de $\mathbb{R}^d$). Enfin, les points de PCE sont projetés sur le plan de départ selon la direction normale au plan (cette projection est notée Pr). La projection des points contenus dans le plan épais $Pr(PCE)$ sera exactement l'ensemble des sommets des tuiles du pavage. Pour obtenir un pavage, il suffit de relier les points du plan $Pr(x)$ et $Pr(x')$ (appartenant à $Pr(PCE)$) par un segment de droite si et seulement si les points avant projection x et x' (appartenant à PCE) diffèrent de 1 sur une seule des coordonnées. Plus mathématiquement, si $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ et $x' = \sum_{i=1}^{d} x'_i e_i$ alors les points $Pr(x)$ et $Pr(x')$ sont reliés par un segment si et seulement si $\sum_{i=1}^{d} |x_i - x'_i| = 1$ et x et x' appartiennent à PCE.

Cette méthode peut être étendue. En effet, au lieu d'un hypercube, l'objet translaté peut être n'importe quel polytope de $\mathbb{R}^d$ et la translation peut s'effectuer le long d'un sous-espace quelconque de $\mathbb{R}^d$.

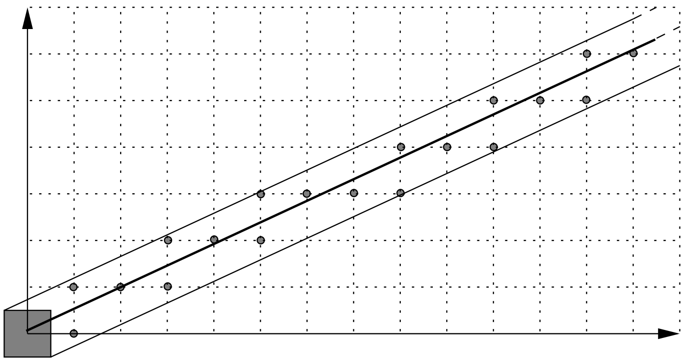

FIG. 3 – Coupe.

Pour fixer les idées, nous allons décrire la construction dans $\mathbb{R}^2$. Considérons le carré unité centré à l'origine et la translation le long d'une droite D passant par l'origine (le plan de coupe de la description générale est remplacé par une droite). Une bande est alors découpée autour de cette droite (voir la figure 3).

En projetant sur D, selon le vecteur normal à cette droite, les points à coordonnées entières appartenant à la bande, cela fournit des points qui seront les extrémités des tuiles. Dans cet exemple, les tuiles sont deux segments de longueurs différentes provenant de la projection du segment unité vertical et du segment unité horizontal (voir la figure 4).

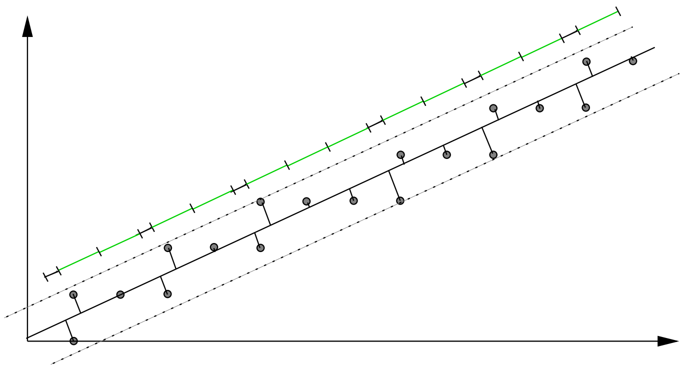

FIG. 4 – Projection.

1.2.2 Infographie

Il faut remarquer maintenant que dans la construction précédente, en reliant les points entiers de la bande par des segments verticaux et horizontaux, une droite discrète est alors obtenue (ou encore une approximation de droite) (voir la figure 5). Les informaticiens connaissent bien cet objet car lorsqu'ils veulent tracer une droite sur un écran d'ordinateur, ils doivent sélectionner des points entiers proches de la droite et allumer les pixels correspondant sur l'écran de l'ordinateur. Pour un informaticien, la sélection des points dans la bande se fait par l'algorithme de Bresenham [32]. C'est pour cela que les droites discrètes font l'objet de nombreux travaux aussi bien en combinatoire des mots qu'en géométrie discrète ([15, 16, 76, 83, 82, 143, 144, 23]).

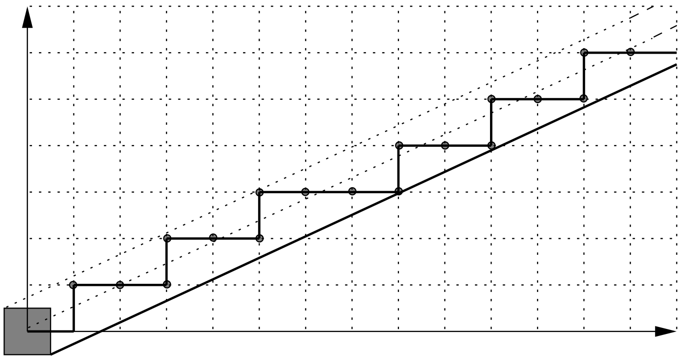

FIG. 5 – Droite discrète.

En généralisant cet objet dans $\mathbb{R}^3$, la méthode de coupe permet de sélectionner des points entiers d'un plan épais. Si l'on relie les points par des faces carrées unité orientées selon les trois plans de coordonnées, on obtient un plan discret (ou approximation de plan, voir la figure 7). Là encore, les plans discrets apparaissent naturellement en infographie car si l'on considère la numérisation d'un objet d'une scène dans $\mathbb{R}^3$, comme l'objet est constitué de facettes, après numérisation chaque facette sera une partie bornée d'un plan discret [44]. Une branche importante de l'infographie s'appuie sur la géométrie discrète et en particulier sur l'étude des plans discrets et des droites discrètes [82, 45, 75, 144, 27]. Les applications de ce domaine sont nombreuses, par exemple en informatique médicale [69], en conception assistée par ordinateurs de carrosserie de voitures ou fuselage d'avions. De beaux algorithmes sont développés pour reconnaître les plans discrets. Ce thème est présent en particulier dans les travaux de Reveilles, Gérard et Debled [143, 52, 145, 84]. Dans le même esprit, l'étude des configurations locales d'un plan discret a fait l'objet de plusieurs publications [83, 81, 45, 153, 173].

1.3 Classes de pavages

La méthode de coupe et projection donne des pavages périodiques du plan si le plan sur lequel l'hypercube est translaté a des coefficients rationnels.

Par exemple, la figure 6 représente un pavage périodique obtenu à partir du plan de normale (1,1,1).

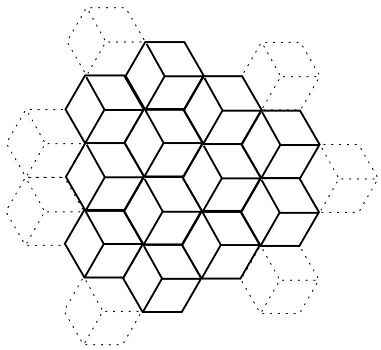

FIG. 6 – Pavage périodique.

Inversement dans R^3, un plan avec une normale totalement irrationnelle fournira un pavage non périodique du plan (une normale est totalement irrationnelle s'il n'y a aucune relation rationnelle entre ses coefficients; plus mathématiquement si la normale est (α, β, γ) alors la seule solution avec des coefficients rationnels de l'équation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est $a = b = c = 0$). Par exemple, la figure 7 représente le pavage du plan provenant de la coupe et projection d'un plan en dimension 3. On peut aussi voir la figure 7 comme un objet de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un plan discret en dimension 3 (aussi appelé approximation de plan). La combinatoire des plans discrets sera largement étudiée au chapitre 3.

Il existe un logiciel très bien conçu qui permet de construire des pavages par coupe et projection d'un espace de dimension 3 à 16 sur un plan. Vous pourrez l'utiliser de façon interactive à l'adresse http suivante :

`http://www.geom.umn.edu/apps/quasitiler/about.html`.

Le pavage de la figure 8 est une partie bornée d'un pavage apériodique construite grâce au logiciel `quasitiler` à partir d'une coupe de $\mathbb{R}^4$ et d'une projection sur un plan (pavage dit $4 \rightarrow 2$).

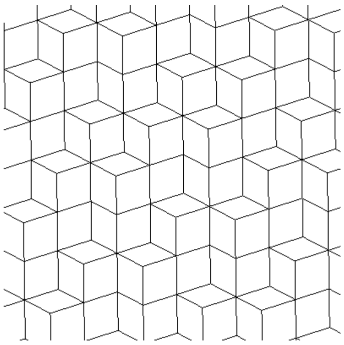

FIG. 7 – Plan discret.

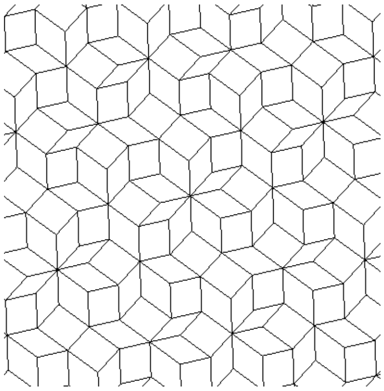

FIG. 8 – Pavage apériodique $4 \to 2$.

La méthode coupe et projection permet de décrire une grande variété de pavages du plan dont les propriétés dépendent fortement de la normale au plan utilisée. Nous allons tenter de classer les pavages ainsi obtenus. Pour commencer, nous allons décrire les propriétés des pavages de la droite.

1.3.1 Morphismes itérés

Les pavages de la demi-droite se codent facilement en un mot infini. Pour cela, il suffit de partir de l'origine, d'associer à chaque type de tuile une lettre et de lire le mot infini en considérant les juxtapositions de tuiles de l'origine jusqu'à l'infini. Comme le pavage provenant de la projection d'une droite discrète contient exactement deux tuiles différentes à translation près, le codage ne fera intervenir que deux lettres.

Inversement, une façon de construire un pavage de la demi-droite consiste à partir d'un mot infini sur un alphabet fini, à choisir un segment de taille différente par lettre et à (re)construire le pavage en suivant l'agencement des lettres dans le mot afin de positionner les tuiles dans le pavage.

Par ailleurs, une méthode classique en informatique pour engendrer un mot infini utilise la notion de morphismes itérés (ou de substitutions) [50, 155, 137]. Un *morphisme* lettre à mot, par définition, associe à toute lettre de l'alphabet un mot sur cet alphabet. Par exemple, le *morphisme de Fibonacci* sur l'alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ est défini par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$ (voir par exemple [14]). Si w est un mot fini de $\mathcal{A}^*$ alors le morphisme appliqué à ce mot est égal à la concaténation des images par morphisme associé aux lettres de w (plus mathématiquement, si $w = w_1w_2\cdots w_n$ où les w_i sont des lettres alors $\sigma(w) = \sigma(w_1w_2\cdots w_n) = \sigma(w_1)\sigma(w_2)\cdots\sigma(w_n)$). De plus, on note $\sigma^n(a)$, n applications du morphisme à la lettre a. Pour illustrer cette définition, $\sigma^2(a)$ est égal à $\sigma(\sigma(a)) = \sigma(ab) = aba$.

Le *mot de Fibonacci* sera défini comme le point fixe de σ, c'est-à-dire le mot infini x tel que $\sigma(x) = x$. Voici les premières lettres du mot infini de Fibonacci

$$x = abaababaabaababaababaabaabab\cdots$$

Ce morphisme appelé morphisme de Fibonacci parce que la longueur du mot $\sigma^n(a)$ est égale au nombre de Fibonacci F_n. Les $\sigma^n(a)$ sont des préfixes du mot de Fibonacci pour tout n. Ce morphisme fait donc intervenir la récurrence suivante $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_{-1} = 1$ et $F_0 = 1$.

De plus, il est remarquable que la méthode coupe et projection dans $\mathbb{R}^2$ avec une droite passant par l'origine de pente $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donne un pavage dont les pavés sont agencés selon le mot de Fibonacci. Plus généralement, un nombre dénombrable de pavages de la droite provenant de coupe et projection sont donnés par morphismes itérés. Il suffit pour cela que le pavage provienne de coupe et projection avec une droite de pente irrationnelle quadratique (i.e. solution d'une équation du second degré) avec aussi une condition combinatoire sur le développement en fractions continues de la pente. Ce lien entre morphisme et pente de la droite est explicité dans l'article de Cris, Moran, Pollington et Shue [49].

Les morphismes itérés ont été très étudiés en informatique, en particulier en théorie des langages sous la dénomination de DOL-systems. Les applications sont nombreuses, par exemple en infographie où l'on utilise des variantes de ces DOL-systems pour représenter des images fractales et faire des modèles de croissance de végétaux. Pour revenir aux mots infinis engendrés par morphismes itérés, les résultats de l'informaticien Pansiot donnent des renseignements sur les différentes classes de mots infinis que l'on peut construire par cette méthode. La classification fait intervenir la fonction de complexité $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui compte les facteurs (un facteur de longueur n est constitué de n lettres consécutives $x_i x_{i+1} \cdots x_{i+n-1}$ du mot x) distincts de longueur n du mot x. Ainsi un mot infini engendré par morphisme itéré a une fonction de complexité vérifiant :

$$C_1 f(n) \leq p(n) \leq C_2 f(n),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives, et f l'une des fonctions $1,\ n, n \log\log n, \log n$ ou n^2 ([130, 131]). Cette construction ne nous donne donc que des classes particulières de mots infinis.

1.3.2 Pavages avec mêmes configurations locales

Deux pavages ont les *mêmes configurations locales* si toute partie bornée du premier pavage apparaît dans le second et inversement (cette notion est aussi appelée *isomorphisme local* par les physiciens). En ce qui concerne les pavages de la droite, étant donné qu'un tel pavage se code naturellement par un mot bi-infini sur un alphabet fini (en codant les agencement de pavés), deux pavages auront mêmes configurations locales si et seulement si les langages des mots infinis associés aux pavages sont égaux. En effet, le langage d'un mot bi-infini x est l'ensemble des facteurs finis apparaissant dans x (un facteur de longueur n d'un mot x est constitué de n lettres consécutives $x_i x_{i+1} \cdots x_{i+n-1}$ du mot x). On note aussi $L_n(x)$ l'ensemble des facteurs finis de longueur n de x. Le langage du mot x est bien sûr $L(x) = \cup_{n=0}^{\infty} L_n(x)$.

Notons de plus que le codage de deux pavages de la droite obtenus par coupe et projection ont même langage si et seulement s'ils proviennent de droites de même pente.

De façon générale, les pavages de la droite par coupe et projection sont déterminés par deux paramètres, la pente et l'intercept (i.e. l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées). En conséquence, en fixant la pente de la droite et en faisant varier l'intercept, on construit une infinité non dénombrable de pavages avec mêmes configurations locales. En termes de mots bi-infinis, le codage de chacun des pavages a le même langage et pourtant on a construit un nombre non dénombrable de tels mots bi-infinis.

Si maintenant l'on considère deux pavages de la droite par coupe et projection, construits avec deux pentes différentes, alors les configurations locales sont différentes. En particulier les deux mots bi-infinis associés aux pavages ont des langages différents.

1.3.3 Les différentes classes de pavages

Les pavages de la droite obtenue par coupe et projection sont fonctions de deux paramètres (α, ρ) avec α la pente de la droite et ρ l'intercept.

Les classes de pavages de la droite obtenus par coupe et projection sont les suivantes; on parlera :

- de la classe des pavages construits par morphismes itérés (α irrationel quadratique);
- de la classe des pavages ayant mêmes configurations locales (α fixé et ρ quelconque);
- de la classe des pavages de la droite obtenus par coupe et projection (α et ρ quelconques).

De même, pour les pavages obtenus par coupe et projection dans $\mathbb{R}^d$ avec projection sur un plan (les physiciens parlent de pavages $d \to 2$), on parlera :

- de la classe des pavages donnés par la généralisation des morphismes itérés (règles d'inflation et déflation des physiciens, substitutions à deux dimensions des mathématiciens);
- de la classe des pavages ayant les mêmes configurations locales. Typiquement, l'ensemble des pavages obtenus à partir d'un plan de normale donnée en jouant sur l'intercept (c'est-à-dire l'intersection de ce plan avec l'axe e_1);
- de la classe des pavages du plan $d \to 2$ obtenus par coupe et projection.

Les physiciens travaillent souvent avec les pavages donnés par des règles d'inflation car elles permettent d'obtenir de bons modèles des quasicristaux [35, 8, 154, 146]. Les ergodiciens étudient eux aussi les deux premiers types de pavages [137, 49]. Il faut ajouter que certains résultats peuvent s'étendre aux pavages généraux $d \to 2$ (voir [23] pour des propriétés de la classe des pavages $3 \to 2$).

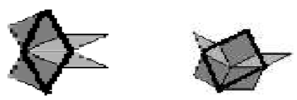

FIG. 9 – Inflation.

À titre d'exemple, le pavage original de Penrose provient des règles d'inflation suivantes sur les losanges: la figure 9 représente l'inflation à partir des deux sortes de losange apparaissant dans le pavage de Penrose (losanges fin et large en noir sur la figure). Par inflation, l'intérieur du losange fin est remplacé par deux moitiés homothétiques de losange fin et 2 moitiés

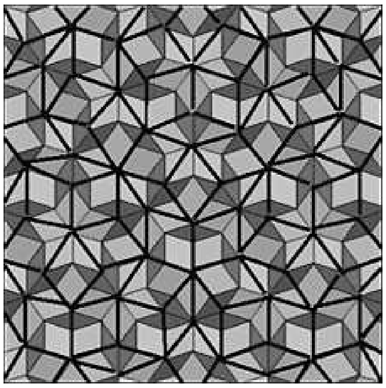

FIG. 10 – Application de l'inflation.

homothétiques de losange large. L'intérieur du losange large est quant à lui remplacé par 4 moitiés homothétiques de losange large et deux moitiés homothétiques de losange fin. Le pavage de départ est constitué de losanges fins et larges en noir sur la figure 10. Après inflation, on obtient le pavage avec des losanges fins en gris foncé et des losanges larges en gris clair. De nombreux théorèmes ont pour objet pour ce pavage. De Bruijn a de plus montré que le pavage de Penrose pouvait être construit par coupe et projection à partir d'un plan en dimension 5 [34]. L'approche de De Bruijn implique que de nombreuses propriétés du pavage de Penrose se généralisent à la classe des pavages $5 \to 2$, et même $d \to 2$.

En résumé, lors de la lecture d'un article sur les pavages provenant de coupe et projection, il faut d'abord se demander dans quelles classes se trouvent ces pavages et ensuite voir si les propriétés démontrées proviennent des morphismes, des configurations locales, ou encore si elles sont générales aux pavages $d \to 2$.

2 Mots unidimensionnels

Dans le chapitre précédent, nous avons abordé le codage des pavages de la droite par des mots et cette méthode a fourni un outil puissant. Cette approche nous a en effet propulsé dans un domaine de l'informatique théorique qu'est la combinatoire des mots. L'enjeu est double. D'une part comprendre la structure des langages des mots infinis obtenus par diverses constructions comme les automates finis, les morphismes itérés, les équations sur les mots, ou encore les codages de pavages. Les livres de M. Lothaire sont des ouvrages de référence sur le domaine [120, 121]. On pourra aussi lire le *Hand book of formal languages* [88]. Enfin, pour explorer les liens entre dynamique symbolique et théorie des codes, on pourra lire l'habilitation à diriger des recherches de Béal [10] ou le livre de Lind et Marcus [119]. D'autre part, et selon la philosophie de Schützenberger, coder des objets combinatoires par des mots permet de compter et de comprendre la combinatoire intrinsèque de ces objets. Plusieurs utilisations de cette approche ont été très fructueuses, par exemple la combinatoire énumérative de Viennot [170] ou encore le monoïde plaxique et le jeu de taquin. Cette combinatoire provient souvent de phénomènes physiques [169] et le codage permet d'isoler la complexité combinatoire des problèmes. Pour une très bonne synthèse sur les problèmes de combinatoire énumérative, il faut lire l'habilitation à diriger des recherches de Bousquet-Mélou [31].

Ce second chapitre présente un panorama des techniques de construction et d'étude des mots unidimensionnels. Sont abordés les codages d'approximation de droite et les liens avec les mots de Sturm. Nous détaillons d'abord plusieurs caractérisations des mots de Sturm de nature combinatoire, géométrique et arithmétique. Nous présentons aussi les liens entre mots équilibrés et problèmes d'ordonnancement. Ensuite, nous évoquons les méthodes qui permettent de construire des mots infinis à l'aide de systèmes dynamiques. Nous étudions aussi la combinatoire des mots unidimensionnels faisant intervenir les palindromes et les mots de retour.

2.1 Mots de Sturm

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment associer à une droite discrète un codage par un mot infini. Il se trouve que ces mots ont aussi été étudiés par les mathématiciens qui travaillent sur les systèmes dynamiques et plus particulièrement par ceux qui font de la dynamique symbolique. Morse avait déjà utilisé au début du XX ^{e} siècle le codage symbolique pour montrer qu'il existe des géodésiques particulières en les codant par le mot de Thue-

Morse, point fixe de la substitution $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = ba$. Mais l'article fondateur de cette approche a été écrit par Morse et Hedlund en 1940 [89]. Il consiste à coder la trajectoire d'un point par des suites symboliques. Nous reviendrons en détail sur les propriétés liées aux systèmes dynamiques plus loin dans ce chapitre.

Dans leur article, Hedlund et Morse étudient les mots de Sturm :

Définition 2.1 *Un mot infini x est un mot de Sturm si la fonction de complexité de x est $p(n) = n + 1$ pour tout n.*

La fonction de complexité $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ compte les facteurs distincts de longueur n du mot x, c'est-à-dire $p(n) = \text{Card } L_n(x)$. En d'autres termes, un mot de Sturm a exactement $n + 1$ facteurs distincts de longueur n pour tout n. Cette définition implique que les mots de Sturm seront construits sur un alphabet à $p(1) = 2$ lettres. L'exemple le plus connu de mot de Sturm est le mot de Fibonacci défini au chapitre précédent et dont le début est donné par :

$$x = abaababaabaababaababaabaabab \cdots$$

Il est facile de vérifier que les premières valeurs de la complexité sont en accord avec la formule :

$$p(1) = \text{ Card } \{a, b\} = 2,$$

$$p(2) = \text{ Card } \{ab, ba, aa\} = 3,$$

$$p(3) = \text{ Card } \{aba, baa, bab, aab\} = 4,$$

$$p(4) = \text{ Card } \{abaa, abab, baab, baba, aaba\} = 5 \cdots$$

De plus, cette définition combinatoire des mots de Sturm donne lieu à des caractérisations géométriques :

Théorème 2.1 (Hedlund, Morse) *Un mot infini x est un mot de Sturm si et seulement s'il est construit à partir du codage d'une approximation de droite (droite discrète) d'une demi-droite de pente irrationnelle. Les segments sont codés par a pour les segments verticaux et par b pour les segments horizontaux (voir la figure 11).*

Les mathématiciens parlent plutôt de suite de coupures :

Théorème 2.2 (Hedlund, Morse) *Les mots de Sturm sont construits en prenant une demi-droite de pente irrationnelle et en codant par a (resp. par b) les coupures avec les droites verticales (resp. horizontales) passant par des points entiers de $\mathbb{Z}^2$ (voir la figure 12).*

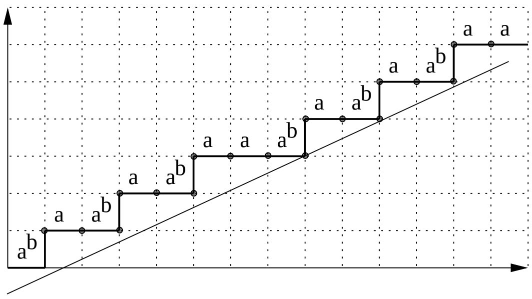

FIG. 11 – Codage d'une droite discrète.

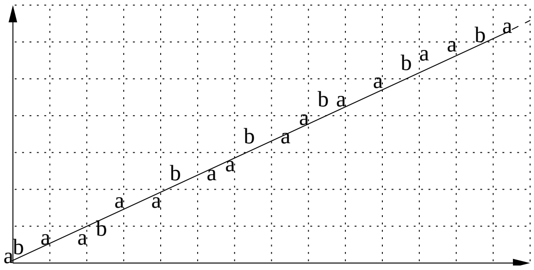

FIG. 12 – Suite de coupure.

Il est remarquable de trouver une caractérisation géométrique à partir d'une définition combinatoire. De plus, il existe un mécanisme pour calculer directement la n $^{\text{e}}$ lettre du mot de Sturm, on utilise alors les mots mécaniques [89, 18].

Un mot de Sturm z est caractérisé par deux paramètres, $0 < \alpha < 1$ irrationnel et ρ réel (et le choix du mot z ou z' dans la définition suivante). La n-ième lettre du mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ est alors donnée par

$$z_n = \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil,$$

ou bien par

$$z'_n = \lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor.$$

Si la droite $y = \alpha x + \rho$ ne passe par aucun point entier alors les mots infinis z et z' sont égaux. Sinon, ils diffèrent uniquement sur deux indices consécutifs. Géométriquement, on retrouve une approximation de droite mais avec des segments horizontaux et diagonaux (Voir la figure 13).

Pour des ouvrages de référence et de synthèse sur les mots de Sturm, je conseillerais la lecture du Lothaire 2 [121] et de l'habilitation à diriger des

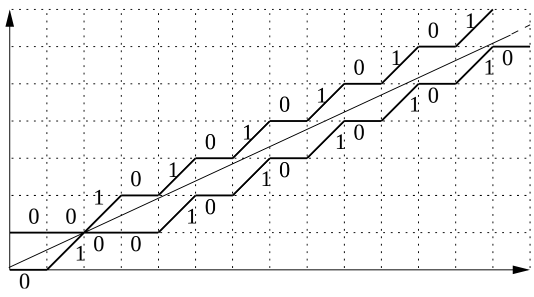

FIG. 13 – Mots mécaniques.

recherches de Berthé [21] ainsi que du tout récent livre des « Marseillais » [26].

2.2 Équilibre

Nous évoquons une dernière caractérisation des facteurs d'un mot de Sturm par l'équilibre. Cette caractérisation est importante parce qu'elle donne lieu à de nombreuses généralisations utiles en informatique théorique.

Théorème 2.3 (Hedlund, Morse) *Un mot infini non périodique x est un mot de Sturm si et seulement si pour tous w et w' de même longueur facteurs du mot x, la différence du nombre de 0 dans le premier facteur (noté $|w|_0$) et du nombre de 0 dans le second facteur est bornée par 1.*

En termes mathématiques, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall w, w' \in L_n(x)\ ||w|_0 - |w'|_0| \leq 1$. Cette caractérisation s'appelle l'équilibre des facteurs des mots de Sturm. Par définition un mot fini u est *équilibré* si pour tous facteurs w et w' de même longueur du mot u alors $||w|_0 - |w'|_0| \leq 1$. Il faut mentionner que cette propriété est typiquement le résultat que l'on recherche en combinatoire des mots. En effet, des contraintes locales sur les facteurs de x (le fait d'être équilibré) donnent une contrainte globale sur la nature du mot (le fait d'être un mot de Sturm).

2.2.1 Équilibre et morphismes de Sturm

Les morphismes de Sturm sont des morphismes qui laissent invariante la classe des mots de Sturm [17]. C'est-à-dire qu'un morphisme de Sturm appliqué à n'importe quel mot de Sturm donne un mot de Sturm. Il est remarquable que l'on puisse tester si un morphisme est un morphisme de Sturm en regardant l'équilibre de l'image par le morphisme d'un mot fini.

Théorème 2.4 (Berstel, Séébold) *Un morphisme est un morphisme de Sturm si et seulement si l'image de $W = abbabbababbaba$ par le morphisme est équilibré.*

Berstel et Séébold testent ainsi une propriété valable pour une classe de mots infinis sur un mot fini de taille 14 (voir [17]).

Par exemple, le morphisme de Fibonacci $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$ est un morphisme de Sturm car le mot $\sigma(W) = abaaabaaabaabaaabaab$ est équilibré. En effet, il suffit de prendre tous les facteurs de même longueur deux à deux (par exemple $w = baaabaa$ et $w' = baabaab$) et de vérifier que $||w|_a - |w'|_a| \leq 1$ (dans l'exemple $|baaabaa|_a = 5$ et $|baabaab|_a = 4$ en accord avec la formule).

2.2.2 Équilibre avec un mot

Avec Isabelle Fagnot [66], nous avons regardé l'équilibre des facteurs sturmiens non pas à partir des lettres de l'alphabet mais à partir des mots. On montre que pour un mot sturmien x la différence du nombre d'apparitions d'un mot u facteur de x dans deux facteurs de même longueur de x est bornée par la longueur du mot u.

Théorème 2.5 (Fagnot, Vuillon) *Si x est un mot de Sturm alors*

$$\forall u \in L(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall w, w' \in L_n(x),$$

$$||w|_u - |w'|_u| \leq |u|.$$

On retrouve bien l'équilibre des facteurs sturmiens en prenant pour u un mot de longueur 1, c'est-à-dire une lettre de l'alphabet. L'article précise que si le développement en fraction continue de la pente associée au mot de Sturm a des quotients partiels bornés alors on trouve une majoration meilleure que la longueur du mot u. Cette différence devient bornée par une constante pour tout n assez grand.

L'intérêt de cette approche est d'abord une meilleure compréhension de la structure des mots de Sturm. Ensuite, cette notion d'équilibre permet d'étudier des phénomènes plus compliqués comme les mots infinis équilibrés sur plus de deux lettres.

2.2.3 Équilibre sur plus de deux lettres

La généralisation précédente fait intervenir les mots de Sturm et donc l'équilibre sur un alphabet à deux lettres. Une façon naturelle de généraliser l'équilibre consiste à étudier des mots équilibrés sur un alphabet fini. Par définition, le mot doit être équilibré pour chacune des lettres de l'alphabet $\mathcal{A} = L_1(x)$ i.e.

$$\forall a \in L_1(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall w, w' \in L_n(x), ||w|_a - |w'|_a| \leq 1.$$

Un résultat de Graham [86] présentant une approche de théorie des nombres et un résultat proche de Hubert [92] avec une approche de combinatoire de mots montrent que les mots apériodiques équilibrés sur plusieurs lettres sont tous construits à partir de mots de Sturm. On remplace périodiquement la lettre a par des lettres d'un premier alphabet A et on remplace périodiquement la lettre b par des lettres d'un second alphabet B avec la condition que les alphabets A et b sont disjoints et que les mots infinis $(a_1, a_2, \cdots a_{k_1})^\omega$ avec $a_i \in A$ et $(b_1, b_2, \cdots b_{k_2})^\omega$ avec $b_i \in B$ sont à trous constants (i.e. l'écartement entre deux occurrences successives de la lettre a_i (resp. b_i) est constant pour chaque i). Par exemple $(abac)^\omega$ est à trous constants mais $(abaac)^\omega$ n'est pas à trous constants.

Nous allons construire un mot équilibré sur 4 lettres à partir du mot de Fibonacci :

$$x = abaababaabaababaababaabaabab \cdots$$

Pour cela nous remplaçons les occurrences de la lettre a par le mot à trous constants $(cdce)^\omega$:

$$cbdcbebcdbcebcbdcbebcdbcebcb \cdots$$

Par construction, le mot est équilibré par rapport à la lettre b, puisque le mot de Fibonacci est équilibré. Il reste (en exercice pour le lecteur) à vérifier que le mot est équilibré par rapport aux lettres c, d et e.

Graham présente son résultat en recouvrant les entiers par des suites de Beatty de la forme $\lceil \alpha n + \beta \rceil$ où n est le paramètre et α le rapport. Il étend alors le théorème suivant [159]:

Théorème 2.6 (Skolem) *Les suites de Beatty $\lceil \alpha_1 n + \beta_1 \rceil$ et $\lceil \alpha_2 n + \beta_2 \rceil$ recouvrent les entiers si et seulement si*

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = 1 \text{ et } \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \in \mathbb{Z}.$$

Le lien entre suites de Beatty et mot de Sturm est simple. En effet, la première suite de Beatty donne les rangs d'apparition de la lettre a et la seconde les rangs d'apparition de la lettre b dans le mot de Sturm associé. Par exemple pour le mot de Fibonacci

$$x = abaababaabaababaababaabaabab \cdots,$$

la première suite est

$$\{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19 \cdots\}$$

et la seconde

$$\{2, 5, 7, 10, 13, 15, 18 \cdots\}.$$

L'union de ces deux ensembles donne bien $\mathbb{N}^*$. Les deux suites de Beatty recouvrent donc bien les entiers.

Lorsque l'on veut recouvrir les entiers avec plus de trois suites de Beatty $\lceil \alpha_i n + \beta_i \rceil$ avec des fréquences de lettres toutes différentes (i.e. les α_i deux à deux différents), alors les coefficients α_i des suites de Beatty deviennent rationnels. Cela implique en particulier que l'on cherche alors des mots périodiques équilibrés.

En informatique, ce problème apparaît dans les problèmes d'optimisation, en particulier de job-shop. Si l'on choisit une contrainte d'utilisation de k tâches partageant la même machine, on est tenté de chercher un mot équilibré sur k lettres avec la fréquence d'apparition des lettres dans le mot équilibré donnée par la contrainte rationnelle. Gaujal [80] a étudié ce problème en donnant une version discrète de la convexité qu'il appelle la multimodularité.

Une conjecture de Fraenkel [74, 166, 167, 80] affirme que le problème est très contraint. Si l'on considère k tâches avec des contraintes d'utilisation toutes différentes, cela veut dire qu'il faut construire un mot infini périodique avec des fréquences de lettres toutes différentes. On montre que le seul mot équilibré sur un alphabet à 3 lettres ayant des fréquences toutes différentes est $(1213121)^\omega$ (ce résultat est vrai à permutation des lettres près). Le seul mot sur un alphabet à 4 lettres ayant des fréquences toutes différentes est $(121312141213121)^\omega$.

La conjecture de Fraenkel affirme que le seul mot équilibré sur un alphabet à k lettres ayant des fréquences toutes différentes est $(FR_k)^\omega = (FR_{k-1}kFR_{k-1})^\omega$ où $FR_3 = 1213121$. On remarque que le mot FR_k est un palindrome. Nous reviendrons plus en détail sur le rôle des palindromes en informatique théorique dans ce chapitre. De plus, la conjecture a été démontrée pour $k = 3, 4, 5, 6$ [166, 167, 80].

Une approche possible de la conjecture utilise l'équilibre sur les facteurs que nous avons étudié avec Fagnot. Nous avons montré que les mots de Sturm sont tels que

$$\forall u \in L(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall w, w' \in L_n(x),$$

$$||w|_u - |w'|_u| \leq |u|.$$

La notion de mots hyper-équilibrés semble prometteuse pour l'étude des mots de Fraenkel FR_k :

$$\forall u \in L(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall w, w' \in L_n(x),$$
$$||w|_u - |w'|_u| \leq 1.$$

L'hyper-équilibre signifie simplement que la différence du nombre d'apparitions d'un facteur u du mot infini x dans deux facteurs de x de même longueur est bornée par 1. On peut montrer que les mots de Fraenkel sont hyper-équilibrés. Je pense qu'une façon d'attaquer la conjecture de Fraenkel est de caractériser la classe des mots hyper-équilibrés sur plus de trois lettres et ensuite de restreindre cette classe aux mots avec des fréquences de lettres toutes différentes.

2.3 Mots infinis et systèmes dynamiques

Nous évoquons maintenant les méthodes qui permettent de construire des mots infinis à l'aide de systèmes dynamiques.

Les mots de Sturm sont obtenus par codage de rotation d'angle irrationnel α avec une partition du cercle en deux intervalles dont l'un est exactement de longueur α. Ainsi, on caractérise les mots de Sturm en considérant la partition $I_1 = [0, \alpha[$ et $I_0 = [\alpha, 1[$ (ou bien $I'_1 =]0, \alpha]$ et $I'_0 =]\alpha, 1[\cup 0)$ et la rotation d'angle irrationnel α donnée par $R_\alpha(y) = \{y + \alpha\}$ où $\{y\}$ est la partie fractionaire de y. Un mot infini x est un mot de Sturm si et seulement s'il existe un point de départ γ, un angle irrationnel α et une des partitions I ou I' tels que $x_n = \mathcal{I}(R^n_\alpha(\gamma))$ avec $\mathcal{I}(y) = i$ si $y \in I_i$ et pour $n > 1$, $R^n_\alpha(y) = R^{n-1}_\alpha(y + \alpha)$ (voir la figure 14).

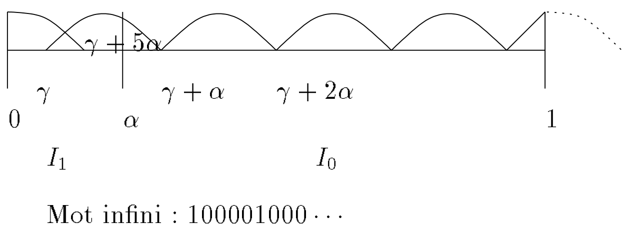

FIG. 14 – Rotation et codage.

2.3.1 Mots de complexité $p(n) = 2n + 1$

Les mots de complexité $p(n) = 2n + 1$ ont été très étudiés comme généralisations des mots de Sturm [16]. De nombreuses constructions existent à partir de codage de rotations [148, 23, 24, 25, 68], d'échange d'intervalles [7, 97, 67, 139], en envisageant des propriétés de combinatoire des mots [42, 55, 41], et aussi par morphismes itérés [7, 131].

Les mots d'Arnoux-Rauzy sont aussi une généralisation des mots de Sturm. Un mot de Sturm a pour complexité $p(n) = n+1$ et donc la différence première est égale à 1: $p(n+1) - p(n) = 1$ pour tout n. C'est-à-dire qu'il y a pour chaque longueur n un mot et un seul qui se prolonge à droite (resp. à gauche) de deux façons. Il est appelé le mot spécial droit (resp. gauche) de longueur n. Les mots d'Arnoux-Rauzy sont construits sur un alphabet à 3 lettres avec la propriété que pour chaque longueur, il y a un et un seul mot qui se prolonge à droite (resp. à gauche) de trois façons et tous les autres mots se prolongent à droite (resp. à gauche) d'une seule façon. Et donc la fonction de complexité pour les mots d'Arnoux-Rauzy est $p(n) = 2n + 1$. Cette généralisation est aussi donnée par un échange de 6 intervalles sur le cercle unité [7].

2.3.2 Billards

Après les codages de rotation sur le cercle, nous allons aborder le monde des billards [168, 110]. En effet les mots de Sturm sont caractérisés par les suites de billard carré. Considérons une table de billard carré et la trajectoire d'un point faisant une pente irrationnelle avec l'un des côtés du carré. Chaque fois que le point touche un bord, il rebondit selon les lois de la réflexion (les angles de la trajectoire avec la normale au point d'impact sont égaux avant et après réflexion). Si l'on code par 0 (resp. par 1) lorsque le point touche un des côtés horizontaux (resp. verticaux), alors le mot infini donné par le codage de la trajectoire est un mot de Sturm (il faut bien sûr enlever un nombre dénombrable de trajectoires pour un angle donné : les trajectoires qui finissent dans un coin du billard).

Maintenant, jouons au billard dans un cube, en prenant une direction totalement irrationnelle et en codant par i lorsque la trajectoire rebondit sur les côtés de normale e_i, on construit alors une suite de billard cubique de complexité $p(n) = n^2 + n + 1$ [6]. Ces mots infinis sont aussi construits comme codage d'une rotation sur T^2. Dans ce système dynamique, le tore (de dimension 2) sera l'hexagone $\alpha \times \beta \times 1$ provenant de la projection du cube unité selon la direction de la trajectoire du billard $(\alpha, \beta, 1)$. La partition provient naturellement de la projection des faces (recouvrant le point origine) du cube.

Les suites de billard cubique sont aussi le mélange de trois mots de Sturm. En effet, la suite de billard est construite sur un alphabet à trois lettres $\{1, 2, 3\}$ et par effacement de la lettre 1 (ou de la lettre 2 ou 3) du mot infini, on retrouve un mot de Sturm.

Par exemple, voici le début d'une suite de billard cubique :

$$231232132312321322312312321323123213223123...$$

et les trois mots de Sturm associés :

$$23232323232322323232323232322323...$$

$$3131331313313131331313313...$$

$$2122121221221212212122212212...$$

Dans l'article [6], les auteurs conjecturent une jolie formule : la fonction de complexité associée à une suite de billard dans un hypercube de dimension $s + 1$ pour les mots de longueur n est :

$$p(n, s) = \sum_{i=0}^{\inf(n,s)} \frac{n!s!}{(n-i)!i!(s-i)!}.$$

Il faut noter le rôle symétrique dans la formule de la dimension de l'espace et de la longueur des mots ($p(n, s) = p(s, n)$). Baryshnikov a démontré cette formule en toute dimension et pour toute longueur de mots [9].

2.4 Combinatoire des mots

Les palindromes interviennent très souvent en combinatoire des mots et en informatique [56, 3, 2, 122]. Un palindrome est un mot qui se lit indifféremment de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche, c'est-à-dire qui contient le même agencement de caractères dans les deux sens de lecture. Les mots suivants sont des palindromes : radar ou rotavator. Certaines personnes recherchent pour s'amuser les palindromes dans les discours d'hommes politiques (voir la page web suivante pour les palindromes dans les discours de Gore et Clinton `http://www.realchange.org/pal/polpals.htm`). Le groupe Oulipo (Ouvroir de Littérature Potentielle) créé en 1960 et dont Georges Perec était membre, proposait des poèmes dont la structure était palindromique.

2.4.1 Palindromes dans les mots de Sturm

L'étude des palindromes apparaissant dans un mot de Sturm montre une alternance entre le nombre de palindromes pairs et impairs. Droubay et Pirillo dans [56] ont démontré la jolie caractérisation suivante :

Théorème 2.7 (Droubay, Pirillo) *Un mot infini est un mot de Sturm si et seulement si le nombre de palindromes de longueur* $2n+1$ *est* 2 *pour tout* n *et le nombre de palindromes de longueur* $2n$ *est* 1 *pour tout* n $(Pal_{2n+1} = 2$ *et* $Pal_{2n} = 1)$.

La complexité palindromique est un outil qui a des applications, par exemple en physique : le spectre de l'opérateur de Schrödinger d'un mot infini non périodique est discret si la complexité palindromique pour les mots de longueur n ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini ($\limsup_{n\to\infty} Pal_n > 0$). Allouche et ses co-auteurs présentent dans [2] une très bonne synthèse sur la complexité palindromique incluant l'étude des mots de Rote, Kolakoski, de doublement de période, de Rudin-Shapiro, de pliages de papier, de morphismes itérés primitifs et des applications à la physique.

2.4.2 Clôture palindromique

Les palindromes interviennent aussi dans la construction de De Luca [122] des mots sturmiens standards (mots infinis qui se prolongent de deux façons à gauche et tel que les deux prolongements soient sturmiens). Ainsi les préfixes palindromes $u_1, u_2, \cdot$ d'un mot sturmien standard u sont donnés grâce a une suite directrice $x = x_1x_2\cdots$ avec $x_i \in \{a, b\}$ et la clôture palindromique $u_{n+1} = (u_nx)^{(+)}$ avec $u_1 = x_1$. La clôture palindromique d'un mot w noté $w^{(+)}$ est le plus petit palindrome contenant w comme préfixe.

Justin et ses coauteurs utilisent la généralisation de cette construction pour étudier les mots d'Arnoux-Rauzy [7] et leurs généralisations (les mots épisturmiens [55, 94, 95, 16]). Les préfixes palindromiques d'un mot épisturmien standart est construit grâce à une suite directrice $x = x_1x_2\cdots$ avec x_i dans un alphabet fini et à la clôture palindromique $u_{n+1} = (u_nx)^{(+)}$.

Par exemple, le mot d'Arnoux-Rauzy est un épisturmien standard donné par le point fixe du morphisme $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ac$ et $\sigma(c) = a$. En effet, il peut être construit par clôture palindromique à partir de la suite directrice périodique $(abc)^\omega$:

$$x = \mathbf{ab}a\mathbf{c}aba\mathbf{a}bacaba\mathbf{b}acabaabacaba\mathbf{c}\cdots$$

où les lettres du mot $(abc)^\omega$ sont en gras.

Une question ouverte consiste à trouver l'analogue de cette construction pour engendrer les plans discrets ou bien les suites doubles provenant du codage de plans discrets.

2.4.3 Mots de retour

Plusieurs résultats récents utilisent les mots de retour [4, 16, 38, 66, 61, 91, 95, 174]. Soit u un mot fini facteur d'un mot infini récurrent x. Un mot infini sera dit *récurrent* si tout facteur de ce mot apparaît infiniment souvent. Un mot de retour sur u est un facteur z' tel que $uz = z'u$, $uz \in L(x)$ et $|uz|_u = 2$. Ainsi, l'ensemble des mots de retour sur u est l'ensemble des facteurs commençant à une occurrence de u et finissant juste avant l'occurrence suivante de u dans le mot infini x.

Durand a introduit les mots de retour pour étudier les mots engendrés par morphismes itérés [61, 60]. Il définit la notion de suite dérivée par rapport à un facteur z : un mot infini récurrent est découpé à l'aide des mots de retour sur w avec w préfixe du mot infini.

Ainsi le mot x :

$$101001010010010100101001010010010...$$

peut se recoder par rapport aux mots de retour sur 101. L'ensemble des mots de retour sur 101 contient 10100 et 10100100, et donc la suite dérivée de x commence par

$$12112...$$

Les mots de retour sur 10 donnent les deux mots 10 et 100 et donc la suite dérivée de x est

$$1212212121221...$$

Un morphisme itéré sera dit *primitif* s'il existe un entier k tel que les images des lettres de l'alphabet par k applications du morphisme contiennent au moins une occurence de chaque lettre de cet alphabet. Ainsi le morphisme de Fibonnaci est primitif car pour $k = 2$ les images des lettres de l'alphabet $\{a, b\}$ contiennent au moins une occurrence de chaque lettre de l'alphabet: $\sigma^2(a) = aba$ et $\sigma^2(b) = ab$

Théorème 2.8 (Durand) *Un mot récurrent est donné par un morphisme itéré primitif si et seulement si le nombre de ses suites dérivées est fini.*

Durand a publié plusieurs articles sur le lien entre mots de retour, les morphismes itérés primitifs et le théorème de Cobham [60, 62]. On voit là encore le lien entre informatique théorique et théorie des nombres.

Les mots de Sturm et leurs généralisations peuvent être étudiés grâce aux mots de retour [173, 95]. Il faut remarquer que dans l'exemple de suite dérivée précédent le nombre de mots de retour pour un facteur d'un mot de Sturm est exactement égal à deux. Cette propriété permet de trouver une nouvelle caractérisation des mots de Sturm :

Théorème 2.9 (Vuillon) *Un mot infini est un mot de Sturm si et seulement si le nombre de mots de retour sur w est égal à deux, pour tout w facteur du mot infini.*

Nous montrons également dans [175] le théorème suivant pour les échanges d'intervalles. Un *échange d'intervalles* T est donné par une partition du segment unité en k intervalles et une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$. La transformation T consiste à réarranger les intervalles selon la permutation σ. Les codages de rotations sont donc un cas particulier d'échanges d'intervalles car ils sont construits par permutations circulaires de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Théorème 2.10 (Vuillon) *Le nombre de mots de retour pour un mot infini construit par échange de k intervalles est exactement k.*

Enfin, avec Justin, dans [95] nous calculons le nombre de mots de retour pour des mots épisturmiens standard (définis au paragraphe précédent).

Théorème 2.11 (Justin, Vuillon) *Le nombre de mots de retour dans les mots épisturmiens standards est donné par le cardinal de l'alphabet de la suite directrice (intervenant dans la construction par clôture palindromique).*

Dans l'exemple de la section 2.4.2 la suite directrice est $(abc)^\omega$ et donc le nombre de mots de retour dans le mot de Tribonacci est exactement 3. En utilisant le même argument, nous montrons que le nombre de mots de retour dans les mots d'Arnoux-Rauzy est exactement 3.

Il faut noter que les mots de retour sont hérités d'un outil puissant d'étude des systèmes dynamiques continus. La notion de mots de retour est la version discrète de l'application de premier retour dans un intervalle pour des transformations du cercle unité dans lui-même. En effet, un facteur w du mot de Sturm correspond à un intervalle sur le cercle unité et les mots de retour sur w représentent les différentes façons de revenir dans cette intervalle par rotation. Les résultats précédents montrent que l'approche par mots de retour permet un étude fine des mots infinis. Il serait d'ailleurs intéressant d'appliquer ces méthodes à d'autres mots comme par exemple le génôme.

Pour conclure cette partie et présenter la démarche du prochain chapitre, il me parait important d'étendre la définition des mots de retour aux suites doubles et aux pavages. Pour cela, étant donné un motif d'un pavage, il faut repérer toutes les apparitions de ce motif sur le pavage et définir les mots de retour bidimensionnels. Priebe a donné des définitions de mots de retour et des suites dérivées à l'aide de cellules de Voronoï [134]. Elle trouve que si le nombre de suites dérivées est fini, alors il existe une substitution à deux dimensions qui donne le pavage. Mais sa construction est plutôt complexe et je me demande s'il n'y pas une façon plus simple d'étendre les mots de retour aux suites doubles qui permettrait de disposer d'un outil puissant pour l'étude des pavages.

3 Mots bidimensionnels

Ce chapitre consiste en l'étude du recodage de pavages du plan provenant de la méthode de coupe et projection. En particulier les suites doubles sont introduites pour permettre d'étudier les propriétés combinatoires de ces pavages. Ce domaine récent et en pleine expansion cherche à relier les propriétés combinatoires des suites doubles et les systèmes dynamiques.

3.1 Mots rectangulaires

Travaillant sous la direction de Rauzy au Laboratoire de Mathématiques Discrètes de l'Université d'Aix-Marseille II, l'un de mes premiers résultats de thèse a été de montrer le lien entre pavages du plan par coupe et projection en dimension 3 (pavages $3 \to 2$) et les suites doubles (suites sur deux indices ou encore mots à deux dimensions) [172, 171]. Plus précisément, la projection dans la direction $(1, 1, 1)$ sur le plan $x + y + z = 0$ d'un plan discret en dimension 3 donne un pavage par trois sortes de losanges (voir la figure 15). En coupant chaque losange en deux triangles équilatéraux, on construit alors un réseau de triangles équilatéraux. Ensuite, chaque losange est codé selon sa direction dans le plan (voir la figure 15, la figure de gauche représente une partie d'un plan discret et celle de droite le pavage provenant de la projection du plan discret, il faut de plus noter que le pavage est tourné de $\pi/2$). En effet, comme les losanges proviennent de la projection des 3 faces carrées unité formant le plan discret, les tuiles sur le pavage ont trois directions différentes. Par chance, le codage du pavage se trouve naturellement sur tous les points entiers d'un réseau $\mathbb{Z}^2$. La suite sur deux indices est alors entièrement définie par la valeur du codage aux points entiers de $\mathbb{Z}^2$ (voir la figure 15, les $H_{i,j}$ sur la figure représentent les hauteurs des faces horizontales du plan discret et la suite double U prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ selon l'orientation des losanges).

Ainsi, pour comprendre la structure du pavage, au lieu de considérer les arrangements locaux de losanges, le codage permet de décrire le pavage par des mots à deux dimensions. La forme des mots la plus simple est bien sûr donnée par des mots rectangulaires. La fonction de complexité $P(m, n)$ se définit par le nombre de mots distincts de taille $m \times n$ facteurs de la suite double. Il est étonnant de trouver une formule close pour le nombre de mots $m \times n$:

Théorème 3.1 (Vuillon) *La complexité de la suite double associée au codage de la projection d'un plan discret est donnée par*

$$P(m, n) = mn + m + n \quad \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},$$

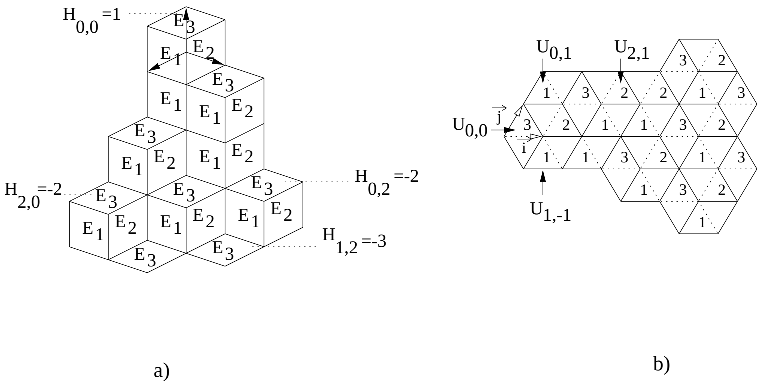

FIG. 15 – Plan discret et codage du pavage.

pour tout plan discret de normale totalement irrationnelle.

Une normale à un plan est *totalement irrationnelle* s'il n'y a aucune relation rationnelle entre ses coefficients; plus mathématiquement si la normale est (α, β, γ) alors la seule solution avec des coefficients rationnels de l'équation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est $a = b = c = 0$.

La première démonstration de ce résultat est plutôt combinatoire [171, 172], mais avec Berthé nous avons découvert une démonstration faisant appel aux systèmes dynamiques [23], nous reviendrons sur cette approche dans le prochain paragraphe.

Nous pensons de plus que cette propriété combinatoire est caractéristique :

Conjecture 3.2 *Une suite double uniformément récurrente a pour complexité*

$$P(m, n) = mn + m + n \ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

si et seulement si elle provient du codage de la projection d'un plan discret de normale totalement irrationnelle.

Il faut remarquer que cette conjecture est vraie pour les mots de Sturm. En effet, un mot infini a une complexité $p(n) = n + 1$ pour tout n si et seulement s'il provient du codage de la projection d'un droite discrète de pente irrationnelle. Une suite double est *uniformément récurrente* si pour tout n, tout facteur de taille $n \times n$ de la suite double apparaît dans un mot de taille $N_n \times N_n$ facteur de la suite double.

3.1.1 Codage de pavages

Les mots de Sturm sont obtenus par codage de rotation d'angle irrationnel α avec une partition du cercle en deux intervalles dont l'un est exactement de longueur α.

Avec Berthé [23], nous avons construit la suite double associée au codage du pavage d'une approximation de plan à l'aide d'un codage de rotation.

Théorème 3.3 (Berthé, Vuillon) *La suite double codant le pavage construit par projection d'un plan discret est donnée par deux rotations R_α et R_β sur le cercle unité partitionné en trois intervalles I_1, I_2, I_3 respectivement de longueurs $|\alpha|, |\beta|$ et $1 - |\alpha| - |\beta|$. La suite double est donnée par $U_{m,n} = \mathcal{I}(R_\alpha^m R_\beta^n(\gamma))$ où $\mathcal{I}(x) = i$ si $x \in I_i$.*

On définit ainsi une suite double en construisant les mots en ligne par la première rotation et les mots en colonne par la seconde rotation. La suite double $U_{m,n}$ est construite par $U_{m,n} = \mathcal{I}(R_\alpha^m R_\beta^n(\gamma))$ où α et β sont les angles des rotations et γ le point de départ (voir la figure 16). Si l'on fixe n dans la formule, on trouve le mot en ligne sur la n e ligne en faisant varier m, on reconnaît un codage de rotation avec une rotation d'angle α et de point de départ $n\beta + \gamma$: $R_\alpha^m(n\beta + \gamma)$ (voir la figure 16). De même, si l'on fixe m dans la formule, on trouve le mot en colonne sur la m e colonne en faisant varier n, on reconnaît un codage de rotation avec une rotation d'angle β et de point de départ $m\alpha + \gamma$: $R_\beta^n(m\alpha + \gamma)$.

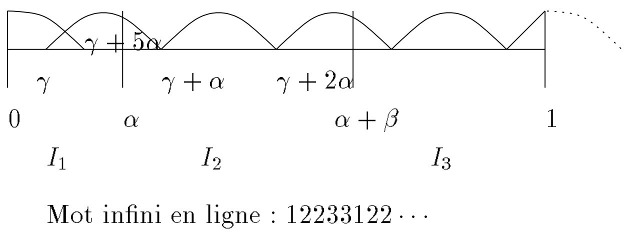

FIG. 16 – Rotation et mot en ligne.

De plus, en comptant les intervalles associés aux mots w de longueur $m \times n$, c'est-à-dire le nombre d'intervalles de la forme

$$\bigcap_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} R_\alpha^{-i+1} R_\beta^{-j+1} I_{w_{i,j}}$$

non vides, nous obtenons que la complexité de la suite double est bien $P(m,n) = mn + m + n$.

Ainsi, pour calculer la complexité d'un pavage, nous avons trouvé un système dynamique qui permet de construire la position locale des tuiles dans le pavage. L'étude de ce système dynamique discret a permis de donner explicitement la complexité de ce pavage.

3.1.2 Systèmes dynamiques de pavages

Ce lien entre les pavages et les systèmes dynamiques est connu sous le nom de systèmes dynamiques de pavages et permet en particulier de donner des propriétés spectrales des pavages en étudiant directement le système dynamique (voir les articles [160, 90, 147]). Robinson montre par exemple que le pavage de Penrose est équivalent à une rotation sur le tore de dimension 4 ($T^4 = R^4 \setminus Z^4$) [147]. Mosseri montre aussi que les pavages construits par projection de l'approximation de plan sont donnés par une rotation sur le tore de dimension 2 ([128]). Cette vision est duale de la nôtre au sens où les projections de plan discret sont pour nous 2 rotations sur le tore de dimension 1 (donc sur le cercle unité) [23]. Pleasants et ses coauteurs [8] ont montré dans la même voie que tout pavage par coupe et projection en dimension n donné par substitution peut être vu comme rotation sur le tore de dimension n. En outre, notre travail va plus loin pour le cas de la projection de plans discrets car nous donnons explicitement la partition du cercle unité qui permet de construire le pavage et notre résultat est vrai pour tout plan de normale totalement irrationnelle (voir la classification du premier chapitre). Dans les articles précédents, seule la rotation est précisée et non pas la partition. Cependant, en termes de théorie spectrale, le fait que le pavage soit équivalent à une rotation sur un tore de dimension n implique que le spectre associé au pavage est discret [90].

La méthode de Mosseri [128] permet de plus de numéroter les configurations locales sur le plan discret. La rotation sur le tore de dimension 2 donne explicitement la position des atomes sur le pavage par ordre de distance croissante par rapport au plan. Cette technique fonctionne pour des approximations rationnelles de plan discret. Il est intéressant de remarquer que Debled dans son algorithme de reconnaissance de plan discret utilise une numérotation similaire pour définir les points d'appuis [52].

3.1.3 Substitutions et pavages

Arnoux, Berthé et Ito ont modifié le développement en fractions continues de Jacobi-Perron afin d'engendrer des plans discrets. Cette méthode s'appuie sur la définition de substitutions sur les faces du plan discret. Une

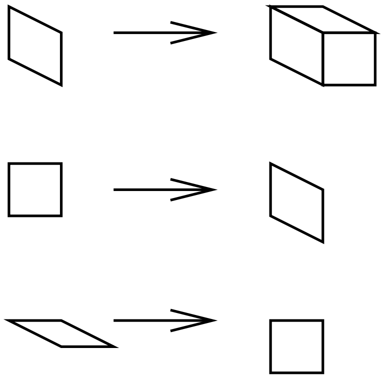

FIG. 17 – Substitution sur les faces.

généralisation du mot de Fibonacci est obtenue en considérant la substitution sur les faces suivante (voir la figure 17).

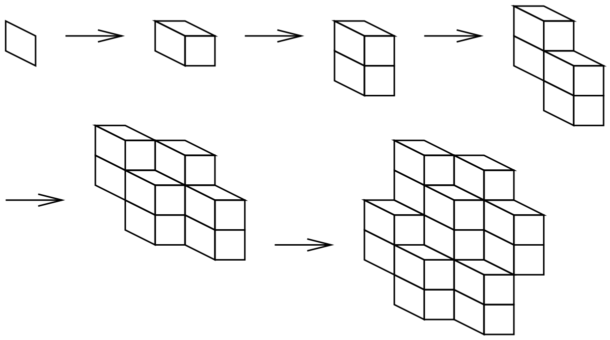

FIG. 18 – Substitution et approximation de plan.

En appliquant n fois la substitution sur les faces σ, $\sigma^n(e_1)$ donne des parties bornées de plan discret centrées à l'origine et emboîtées (voir la figure 18). En faisant tendre n vers l'infini, on tend vers le plan discret de normale $(\xi^2, \xi, 1)$ où ξ est la solution de plus grand module de $x^3 = x^2 + x + 1$. Cette substitution est intimement liée à la récurrence linéaire $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} + f_n$ et donc au nombre de Pisot ξ [140].

C'est exactement cette construction qu'Ito a généralisée pour construire les plans discrets [93] (on trouve aussi cette construction dans la thèse de R. Kenyon [104]). Il faut remarquer que par normalisation de la partie bornée $\sigma^n(e_1)$, on trouve le fractal de Rauzy qui pave le plan de façon périodique

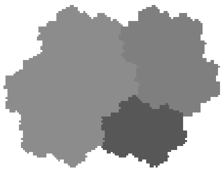

FIG. 19 – Fractal de Rauzy.

(c'est un pseudo-hexagone avec un bord fractal, voir la figure 19). Ce fractal est aussi lié au système de numération de Tribonacci qui généralise celui de Fibonacci [127, 77]. Le fractal de Rauzy permet de construire un pavage non-périodique du plan. Ce pavage est auto-similaire et est un cas particulier du travail de R. Kenyon et Thurston sur ce domaine [104, 107]. Kenyon obtient ainsi une notion de rigidité des pavages [105]. Enfin, l'article de Kenyon et Vershik présente la construction de partitions de Markov en faisant intervenir des systèmes de numération [111].

Rauzy construit le fractal à l'aide du point fixe de la substitution de Tribonacci $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ et $\sigma(3) = 1$. À la lettre i est associé le vecteur e_i dans $\mathbb{R}^3$, puis une ligne brisée est construite selon les lettres du point fixe de Tribonacci. Cette ligne s'enroule autour de la direction propre $(\xi^2, \xi, 1)$ et la projection de cette ligne brisée sur le plan normal à la direction propre donne le fractal de Rauzy.

L'intuition de Rauzy est que l'étude des généralisations des mots de Sturm donnera un algorithme de fraction continue en dimensions supérieures [138].

3.2 Suites doubles

Une façon de généraliser les suites sturmiennes consiste à faire varier les valeurs des angles et de la partition en deux intervalles pour obtenir des familles de suites doubles. On retrouve par cette approche des liens étroits entre les suites doubles et les codages de plans discrets.

- Si l'on veut des mots de Sturm en ligne et en colonne, il suffit de choisir $\alpha = \beta$ et la partition $I_1 = [0, \alpha[$ et $I_0 = [\alpha, 1[$. La complexité de la suite double sera alors $P(m, n) = m + n$.

0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0

- Si l'on veut des mots de Sturm en ligne et des mots de complexité $p(n) = 2n$ (mots de Rote [148]) en colonne, cela revient à considérer deux irrationnels α et β rationnellement indépendants et la partition $I_1 = [0, \alpha[$ et $I_0 = [\alpha, 1[$ avec la condition que $\max(\beta, 1-\beta) < \max(\alpha, 1-\alpha)$. La suite double aura la complexité $P(m,n) = mn + n$.

1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0

- Enfin, si l'on considère la partition $I_1 = [0, \phi[$ et $I_0 = [\phi, 1[$ et les réels α, β et ϕ rationnellement indépendants, le codage de rotations donne une suite double de complexité $P(m, n) = 2mn$. C'est-à-dire avec des mots de Rote en ligne et en colonne. L'intérêt de cette construction est de trouver des liens entre les plans discrets et les suites de complexité $2mn$. Dans [173], nous étudions le nombre de configurations locales dans un plan discret à l'aide de suites doubles de complexité $2mn$ avec $\phi = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Avec Berthé nous avons démontré dans [24], les caractérisations suivantes de ces suites doubles (les deux théorèmes font intervenir soit la partition $I_1 = [0, \alpha[$, $I_0 = [\alpha, 1[$ soit $I'_1 =]0, \alpha]$ et $I'_0 =]\alpha, 1[\cup 0)$:

Théorème 3.4 (Berthé, Vuillon) *Une suite double uniformément récurrente a pour complexité $P(m, n) = m + n$ si et seulement si la suite double est donnée par*

$$U_{m,n} = \mathcal{I}(R_\alpha^m R_{\varepsilon\alpha}^n(\gamma))$$

avec α irrationnel, $\varepsilon = \pm 1$ et la partition I ou I'.

Théorème 3.5 (Berthé, Vuillon) *Une suite double uniformément récurrente a pour complexité $P(m, n) = mn + m$ si et seulement si elle est construite par*

$$U_{m,n} = \mathcal{I}(R_\alpha^m R_\beta^n(\gamma))$$

où α et β sont irrationnels et rationnellement indépendants, avec la partition I ou I' et la condition $\max(\beta, 1 - \beta) < \max(\alpha, 1 - \alpha)$.

Ce théorème fait le lien entre une propriété combinatoire (sur le nombre de mots rectangulaires de taille $m \times n$) et un système dynamique donné par deux rotations d'angles irrationnels sur le cercle unité avec la bonne partition. C'est donc l'analogue pour les suites doubles de la caractérisation d'Hedlund et Morse [89] pour les mots de Sturm. Comme motivation supplémentaire pour l'étude des suites doubles, il faut noter que le théorème précédent est un premier pas pour montrer une caractérisation des pavages par leurs complexités :

Conjecture 3.6 *Une suite double uniformément récurrente a pour complexité*

$$P(m,n) = mn + m + n \ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

si et seulement si la suite double est donnée par deux rotations R_α et R_β sur le cercle unité partitionné en trois intervalles I_1, I_2, I_3 respectivement de longueurs $|\alpha|, |\beta|$ et $1 - |\alpha| - |\beta|$.

3.2.1 Équilibre des suites doubles

Rechercher des suites équilibrées à deux dimensions permet d'obtenir un modèle de répartition d'antennes pour capter des mobiles (ou téléphones cellulaires) sur un réseau. Je vais développer en quelques lignes cette application de l'équilibre à deux dimensions. Ce problème m'a d'ailleurs était posé lors d'un séminaire à l'INRIA Sophia-Antipolis. On cherche à répartir dans le plan des antennes de telle sorte que lors d'un déplacement d'un individu avec son mobile le nombre d'antennes dans le voisinage de la personne soit proche d'une constante pour une forme de voisinage donnée. Le problème revient à considérer une suite double sur l'alphabet à deux lettres. La valeur 0 dans la suite double représente un point du réseau où il n'y a pas d'antenne et la valeur 1 représente un point où il y a une antenne. Si l'on considère deux voisinages rectangulaires, c'est-à-dire deux mots rectangulaires w et w' de taille $m \times n$ facteurs de la suite double, alors le nombre d'antennes dans w doit être sensiblement égal au nombre d'antennes dans w'. En termes mathématiques, $||w|_1 - |w'|_1| \leq 1$ et l'on retrouve l'équilibre des facteurs pour des mots rectangulaires.

Berthé et Tijdeman [22] montrent que les suites doubles équilibrées sur 2 lettres sont très rares. En particulier, la fréquence α de la lettre 1 (c'est-à-dire la limite du nombre de 1 dans un mot de taille $m \times n$ centré à l'origine divisé par mn) appartient à l'ensemble fini suivant :

$$\alpha \in \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right\}.$$

Les techniques utilisées font appel à la théorie des nombres et aux systèmes de numération d'Ostrovski. Il faut remarquer que la fréquence de la lettre 1 dans les mots équilibrés peut prendre toutes les valeurs irrationnelles ([20]) alors que pour les suites doubles équilibrées seul un ensemble fini de valeurs est possible.

3.2.2 Palindromes à deux dimensions

La notion de palindrome s'étend naturellement aux suites doubles uniformément récurrentes. Un palindrome est alors un mot de taille $m \times n$ invariant par symétrie centrale. L'analogue de cette caractérisation pour les mots de Sturm peut être obtenue [25]. La notation $Pal_{m,n}(x)$ représente le nombre de palindromes distincts facteurs de x de taille $m \times n$.

Théorème 3.7 (Berthé, Vuillon)
$Pal_{2m+1,2n+1}(x) = 2$,
$Pal_{2m+1,2n}(x) = 1$,
$Pal_{2m,2n+1}(x) = 1$,
$Pal_{2m,2n}(x) = 2$
pour tout $m \geq 0$ et $n \geq 0$ si et seulement si

$$P(m,n) = m + n.$$

Le théorème précédent fait donc le lien entre le nombre de palindromes et la suite double donnée par des mots de Sturm en ligne et en colonne.

Théorème 3.8 (Berthé, Vuillon)
$Pal_{2m+1,2n+1}(x) = 2$,
$Pal_{2m+1,2n}(x) = 1$,
$Pal_{2m,2n+1}(x) = 2$,
$Pal_{2m,2n}(x) = 2$
pour tout $m \geq 0$ et $n \geq 0$ si et seulement si

$$P(m,n) = mn + m.$$

Les configurations locales dans les plans discrets ont aussi l'analogue de cette alternance. Une partition plane est auto-complémentaire si la partition plane et la partition plane inversée sont les mêmes (voir la figure 20). Si $H_{i,j}$ représente les hauteurs de la partition plane (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) alors la partition plane inversée est définie par $(\max_{i,j} H_{i,j}) - H_{i,j}$. De façon géométrique, la partition plane correspond à un empilement de cubes dans le parallélépipède $n \times m \times \max_{i,j} H_{i,j}$. La partition plane inversée correspond à la partie non remplie du parallélépipède après symétrie par rapport au centre du parallélépipède. En d'autres termes, une partition plane est auto-complémentaire si la position des faces supérieures des piles de cubes est invariante par symétrie centrale par rapport au centre du parallélépipède $n \times m \times \max_{i,j} H_{i,j}$ (voir [112]).

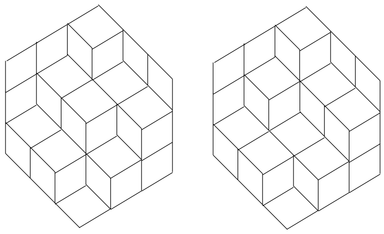

FIG. 20 – Deux configurations locales complémentaires.

Dans [25], nous donnons le nombre de partitions planes auto-complémentaires dans un plan discret de normale totalement irrationnelle :

Théorème 3.9 (Berthé, Vuillon) *Le nombre de partitions planes auto-complémentaires sur un plan discret de normale totalement irrationnelle est* 2 *si* m *ou* n *est pair et* 1 *si* m *et* n *sont impairs.*

Il faut noter que Vittone et Chassery trouvent la même alternance pour des approximations rationnelles de plans discrets [46].

Là encore, il est fort probable que cette propriété sur l'alternance des partitions planes auto-complémentaires dans les surfaces discrétisées soit une propriété caractéristique.

3.2.3 Périodicité

Pour clore ce chapitre, nous allons aborder le lien entre fonction de complexité et périodicité. Hedlund et Morse ont démontré dans [89] le théorème suivant :

Théorème 3.10 (Hedlund, Morse) *Si un mot infini est tel qu'il existe* n_0 *pour lequel* $p(n_0) \leq n_0$ *alors le mot est ultimement périodique (périodique à partir d'un certain rang).*

Ce résultat se montre facilement en considérant le prolongement de chacun des mots.

La généralisation de ce théorème donne la conjecture suivante :

Conjecture 3.11 *Si une suite double a une fonction de complexité telle qu'il existe m_0, n_0 et $P(m_0, n_0) \leq m_0 n_0$ alors la suite double a au moins une direction de périodicité (la suite est alors 1-périodique : $\exists a, b\, \forall i, j\ U_{i+a,j+b} = U_{i,j}$).*

Cette conjecture est intimement liée aux pavages et en particulier au théorème de Beauquier-Nivat [11] que nous avons présenté au début du premier chapitre. À titre d'exemple, prenons les $m_0 n_0$ mots sur l'alphabet $\{0,1\}$ avec un et un seul 1 dans chaque mot. La lettre 1 apparaît donc à des positions différentes dans chacun des mots. La deuxième partie du théorème de Beauquier-Nivat apparaît lors de l'étude des positions du mot M de taille $m_0 \times n_0$ avec un 1 en haut à gauche. On peut alors associer à la suite double un pavage avec une tuile rectangulaire de taille $m_0 \times n_0$. Cette tuile entoure exactement toutes les occurrences du mot M dans la suite double (voir la figure 21). Comme le pavage est formé d'une tuile qui est un pseudo-hexagone, d'après la deuxième partie du théorème de Beauquier Nivat le pavage est 1-périodique, et donc la suite double est 1-périodique (voir la figure 21).

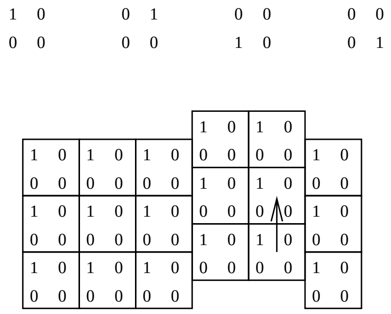

FIG. 21 – Suite double et pavage.

Sander et Tijdeman dans [152, 151, 150] ont une preuve de la conjecture dans le cas particulier des mots rectangulaires de taille $2 \times n_0$ et donnent des variantes de cette conjecture. Une version affaiblie a été montrée par Epifanio, Koskas et Mignosi. Dans [65], ils ont prouvé que s'il existe m_0, n_0 tels que $P(m_0, n_0) \leq \frac{1}{144} m_0 n_0$ alors la suite double a au moins une direction de périodicité. Dans le même esprit, Cassaigne [39] a entièrement décrit les suites sur deux indices de complexité $P(m, n) = mn+1$. Il montre que ces suites sont toutes construites à partir de mots de Sturm ou de formes dégénérées de ces mots. Cassaigne exhibe un contre-exemple pour la conjecture généralisée à des fenêtres de forme quelconque ([40]).

Pour revenir à une thématique de recherche en informatique, il faut noter que cette étude se rapproche des langages de figures [157, 85]. De plus beaucoup de questions sur les pavages deviennent des questions sur l' indécidabilité [147, 176, 13]. En effet, les logiciens et les informaticiens regardent depuis 40 ans les problèmes d'indécidabilité à l'aide des tuiles de Wang [176]. Ce sont des pavés carrés dont les bords sont colorés et qui ne peuvent être adjacents bord à bord qu'à des pavés avec un bord de même couleur. Ces pavés sont d'ailleurs utilisés pour simuler des machines de Turing et cela permet via les pavages de démontrer des résultats d'indécidabilité. On peut se référer à l'habilitation à diriger des recherches de Durand [58] pour une bonne synthèse sur le lien entre indécidabilité, pavages et automates cellulaires (voir aussi les articles pour l'utilisation de cette méthode [57, 59]).

Enfin, on remarque encore qu'une contrainte locale donnée par le nombre de mots de taille $m_0 \times n_0$ inférieur à m_0n_0 induirait une propriété globale : la suite double a au moins une direction de périodicité. Pour faire le lien avec le travail de compréhension du monde des physiciens, c'est justement ce type de phénomène qui est en jeu lors de la croissance des quasi-cristaux. Une contrainte locale sur les agencements d'atomes donne à la structure une propriété d'invariance globale.

4 Pavage d'une partie bornée

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux pavages d'une partie bornée du plan ou de l'espace à partir d'un ensemble de tuiles T. Plusieurs questions naturelles seront abordées. Par exemple :

- Peut-on décider si une région bornée donnée est pavable par des copies de tuiles de T ?
- Combien y a-t-il de pavages distincts de cette région ?
- Existe-t-il des règles locales permettant de passer d'un pavage à un autre ?

Ces trois questions se résument à l'existence d'un pavage d'une région donnée, au dénombrement des configurations différentes et au fait de trouver un système dynamique pour engendrer toutes les configurations.

Au sujet de l'existence, Thurston, Conway et Lagarias ont développé des méthodes utilisant les groupes de pavages [164] ainsi que des fonctions de hauteur associées aux tuiles [47]. Les fonctions de hauteur consistent à relever le pavage d'une région du plan en une surface de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, le pavage d'une région simplement connexe du plan par des dominos peut être vu une fois relevé dans $\mathbb{R}^3$ comme une surface s'appuyant sur un bord (voir la figure 22). Cette surface après projection dans la direction normale au plan redonne exactement le pavage.

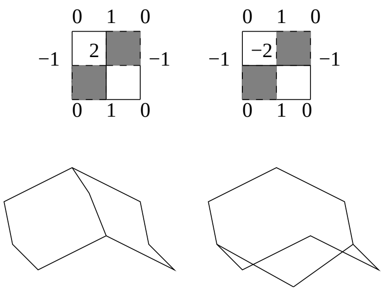

FIG. 22 – Pavage par dominos, fonction de hauteur et relevé dans $\mathbb{R}^3$.

La fonction de hauteur permet de calculer pour chaque point à coordonnées entières du pavage la hauteur du relevé de ce point sur la surface. Thurston définit la fonction de hauteur sur le bord de la région à paver par des dominos [164, 73, 72]. Il suffit de suivre les segments appartenant au pavage et d'ajouter 1 s'il y a un carré noir sur la gauche du segment, et, retrancher 1 sinon (voir la figure 22). On peut alors décider si la région est pavable en examinant uniquement les valeurs de la fonction de hauteur. Il faut en particulier que le relevé du bord soit une courbe fermée de $\mathbb{R}^3$. Ensuite, si la région est pavable, parmi tous les pavages de cette région il existe un pavage pour lequel le minimum de la fonction de hauteur se trouve sur le bord. Un pavé est enlevé en préservant cette propriété de minimum sur le bord. Le processus est réitéré pour paver la région entière. Une analyse de l'algorithme de Thurston montre que sa complexité est polynomial, et J.-C. Fournier donne une variante de cet algorithme avec une complexité linéaire [72].

Pour deux bonnes synthèses sur les techniques de pavages d'une partie bornée du plan, je conseille la lecture des habilitations à diriger des recherches de R. Kenyon [109] pour les aspects mathématiques, topologiques et les liens avec la physique statistique, ainsi que celle de C. Kenyon pour des applications à l'informatique [98]. Il faut noter que le travail de C. Kenyon porte aussi sur des algorithmes randomisés pour énumérer approximativement les pavages des réseaux carré et cubique [103]. Cette réflexion a d'ailleurs donné lieu à des travaux sur des problèmes d'optimisation; la question étant de paver au mieux une figure a priori non pavable. Dans le cas unidimensionnel, ce problème est connu sous le nom de mise en boîte [99, 102]. D'autre part, les fonctions de hauteur peuvent être définies pour des bi-hexagones [98, 101]. C. et R. Kenyon ont prolongé le travail de Thurston en donnant un algorithme linéaire pour le pavage par des barres quelconques d'une partie bornée simplement connexe du plan [100]. En revanche, le pavage par deux barres de longueur supérieure à 3 d'une partie bornée à trous est un problème NP-complet comme le montrent Beauquier, Nivat, Rémila et Robson [12]. Enfin, la thèse de Bodini généralise les fonctions de hauteur de Thurston [29].

Dans ce chapitre, on retrouvera la notion de pavage maximal et minimal lorsque nous présenterons le treillis des configurations des pavages. Il faut remarquer que le pavage construit par l'algorithme de Thurston est exactement l'élément maximum du treillis des pavages par des dominos.

Cette méthode marche très bien pour les pavages par des dominos et aussi par trois types de losanges. Mais les limites de l'algorithme sont rapidement atteintes car peu de pavés admettent des fonctions de hauteur.

4.1 Pavages et partitions planes

Pour bien comprendre le relèvement d'un pavage, nous allons présenter le pavage d'une région hexagonale par des losanges. Un pavage d'un hexagone $\ell \times m \times n$ par trois types de losanges peut être relevé dans $\mathbb{R}^3$ en la surface d'un empilement de cubes unités dans un parallélépipède $\ell \times m \times n$. La contrainte étant que pour avoir un pavage d'une région du plan, il faut et il suffit que la face supérieure de chaque pile de cube ne soit pas cachée (par les autres piles de cubes). Cette construction suggère le codage des hauteurs par des piles de cubes à l'aide d'une matrice de taille $m \times n$ avec des hauteurs $0 \leq h_{i,j} \leq \ell$ telles que $h_{i,j} \geq h_{i+1,j}$ et $h_{i,j} \geq h_{i,j+1}$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et pour tout $0 \leq j \leq n$.

Cet objet combinatoire est très classique : il s'agit d'une partition plane ([162]). Au début du siècle précédent Mac-Mahon a dénombré les partitions planes [123]. Dans les années 80, Elser a utilisé le résultat de Mac-Mahon dans [64] pour compter le nombre de pavages d'un hexagone $\ell \times m \times n$ par des losanges dont voici la fonction génératrice :

$$G_{\ell,m,n}(x) = \frac{M_{\ell+m+n}(x) M_\ell(x) M_m(x) H_n(x)}{M_{\ell+m}(x) M_{\ell+n}(x) M_{m+n}(x)}$$

où $M_n(x) = (1-x)^{n-1}(1-x^2)^{n-2} \cdots (1-x^{n-1})$. Le nombre de configurations est obtenu pour $x = 1$ et est donc égal à $G_{\ell,m,n}(1)$. À titre d'exemple, le nombre de pavages par des losanges d'un hexagone $2 \times 2 \times 2$ est $G_{222}(1) = 20$ car $G_{222}(x) = 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 3x^6 + x^7 + x^8$.

Plus généralement, de nombreuses méthodes permettent de calculer le nombre de pavages d'une partie bornée du plan par des dominos ou des losanges. En particulier les techniques de Kasteleyn, développées dans les années 60, qui utilisent des couplages parfaits d'une sorte de graphe dual (graphe dual du support) des pavages [96], dans le même esprit on peut citer les travaux de Fisher et Temperley [71, 163] (voir la figure 23). Elles font donc intervenir la théorie des graphes planaires ainsi que des variantes des déterminants comme les pfaffiens et les permanents [112, 108]. Ces outils sont encore employés en combinatoire et en physique statistique [112, 162, 109].

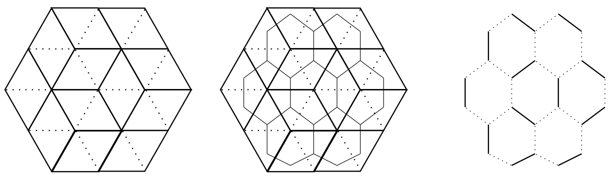

Fig. 23 – Pavage, graphe dual et couplage parfait.

Pour illustrer la méthode de couplage, voici le pavage d'un hexagone $2 \times 2 \times 2$, le graphe dual associé et le couplage parfait du graphe (voir la figure 23).

En résumé, pour le cas des pavages d'hexagones par des losanges, il existe toujours au moins un pavage de l'hexagone et une formule permet de dénombrer les pavages possibles. On a donc répondu aux deux premières questions posées au début de ce chapitre. Nous allons maintenant explorer la troisième question, qui consiste à trouver une règle locale permettant de passer d'un pavage à un autre. Il faut préalablement remarquer qu'il existe exactement deux pavages distincts d'un hexagone $1 \times 1 \times 1$. Nous venons à l'aide de cette remarque géométrique de définir une règle locale pour passer d'un pavage à un autre : il suffit de repérer un hexagone $1 \times 1 \times 1$ d'un pavage et d'échanger les tuiles de cet hexagone pour obtenir un second pavage (voir la figure 24). Cette opération s'appelle le *flip de tuiles*. Il faudra de plus orienter cette règle pour ne pas revenir en arrière c'est-à-dire flipper plusieurs fois le même hexagone.

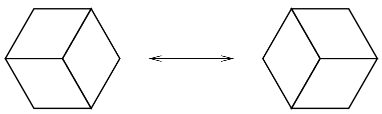

FIG. 24 – Flip de tuiles.

Voici par exemple les vingt configurations des pavages d'un hexagone $2 \times 2 \times 2$ (cf le calcul ci-dessus avec la formule de Mac-Mahon) avec la convention que deux configurations sont reliées par un arc si et seulement si l'on passe de l'une à l'autre par un seul flip de tuiles (voir la figure 25).

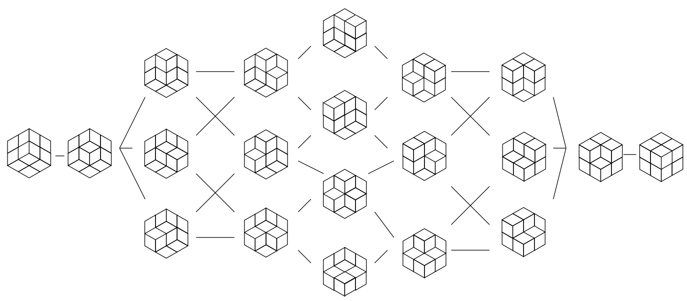

FIG. 25 – Pavages d'un hexagone $2 \times 2 \times 2$.

Dans cet esprit, Kenyon et Elnitsky ont montré que l'ensemble des pavages par des losanges d'une partie du plan simplement connexe est atteignable par flip de tuiles [106, 63]. Kenyon étudie des parties du plan plus générales que Elnitsky et utilise des techniques liées aux lignes de De Bruijn du pavage (nous expliciterons ces lignes dans le prochain paragraphe). Elnitsky transforme ce problème en faisant intervenir le groupe symétrique, les groupes de Coxeter et le groupe des tresses.

Enfin, une façon de voir le flip de tuile sur le relevé du pavage est de considérer l'ajout ou la suppression d'un cube unité sur une pile de cubes avec les contraintes de partie cachée et de non dépassement du parallélépipède. Par conséquent, la notion de pavage maximum et minimum de Thurston est claire : le pavage maximal est le pavage provenant de la projection du parallélépipède entièrement rempli de cubes, et le pavage minimal provient de la projection du parallélépipède entièrement vide de cube.

4.2 Tas de sable

La règle d'ajout de cube du paragraphe précédent s'apparente à la règle d'ajout d'un grain de sable dans les tas de sable. Un tas de sable est la représentation d'une partition d'entiers [5, 161]. À chaque entier de la partition est associée une pile de carrés unité. Cela construit un diagramme de Ferrers ou tas de sable (voir la figure 26).

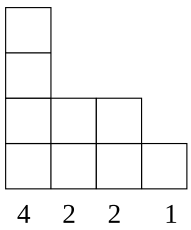

FIG. 26 – Partition d'entier et diagramme de Ferrers.

Le tas de sable s'éboule selon les règles de Sand Pile Model (SPM) [36] :

- On part de la configuration initiale donnée par la partition $< n, 0, \cdots, 0 >$.
- Un grain de sable tombe du haut d'une pile de sable si la hauteur de la pile à droite est inférieure d'au moins deux grains de sable.

En partant de la configuration $< n, 0, \cdots, 0 >$ et quelle que soit la façon de faire ébouler le tas de sable, le même point fixe est atteint (le système est confluent). Le treillis est formé des configurations et il y a un arc entre deux configurations si l'on passe de l'une à l'autre par la règle de SPM [133, 36, 116, 118].

À partir des partitions des entiers et avec la règle de SPM, on construit un treillis distributif. Eric Rémila a montré des résultats sur les treillis à partir des pavages d'un hexagone par des losanges [142] (pavages $3 \to 2$

voir la figure 25), cette idée était dans l'article de Thurston [164] mais pas développée. De même, mais avec le vocabulaire des couplages parfaits, Propp montre que le couplage parfait de tout graphe biparti donne une structure de treillis distributif [135] et cela lui permet de tirer des configurations aléatoires élément d'un treillis distributif [136]. Latapy [115] a découvert une structure d'union de treillis distributif pour les pavages de $2D-$gones par des losanges (pavages $D \to 2$). Cette structure est aussi présente dans l'étude des pavages aléatoires de l'octogone par Destainville [54].

4.3 Zonotopes

La construction de Destainville tirée de sa thèse [53] consiste à partir d'un pavage de l'hexagone (pavage $3 \to 2$) et à définir une partition généralisée sur les tuiles du pavage (à chaque tuile on associe un entier tel que les valeurs soient décroissantes le long de chaque ligne de de Bruijn). Ensuite, il faut choisir un vecteur $\vec{v}$ du plan et translater chaque tuile du vecteur $\vec{v}$ multiplié par la valeur associée à la tuile. Cette construction donne à partir du pavage d'un hexagone un pavage d'une partie bornée de type $4 \to 2$ (voir la figure 27).

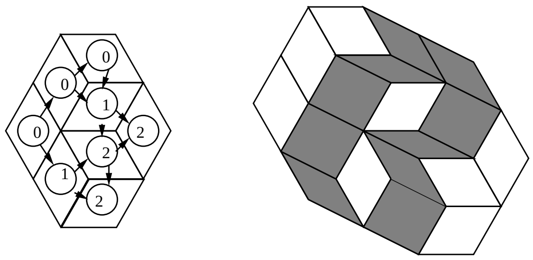

FIG. 27 – Partition généralisée et pavage $4 \to 2$.

En utilisant les notations des zonotopes [177], le pavage obtenu par la méthode de Destainville est un pavage d'un zonotope $Z_{4,2}$ donné par $\sum \lambda_i v_i$ avec 4 vecteurs non colinéaires (v_1, v_2, v_3, v_4) et non nuls de $\mathbb{R}^2$ par des tuiles formées de 2 vecteurs (voir la figure 27).

Le flip de tuile se redéfinit facilement avec le vocabulaire des zonotopes. Il provient alors des deux pavages d'un $Z_{3,2}$ unité par des zonotopes $Z_{2,2}$ unité, c'est-à-dire avec les λ_i égaux à 1 (ce sont les deux pavages par des losanges d'un hexagone avec des côtés égaux à 1). Plus généralement, on peut paver des zonotopes $Z_{D,d}$ donnés par $\sum \lambda_i v_i$ avec D vecteurs non colinéaires et non nuls de $\mathbb{R}^D$ par des tuiles formées de d vecteurs (zonotopes $Z_{d,d}$ unités).

Le flip de dimension d est défini pour les pavages de zonotopes $Z_{D,d}$ comme les deux pavages du zonotope $Z_{d+1,d}$ unité par des tuiles qui sont des zonotopes unités $Z_{d,d}$. Il existe alors exactement deux pavages du zonotope $Z_{d+1,d}$ unité. En effet, soit une tuile $Z_{d,d}$ unité est posée à l'origine du zonotope et le pavage est complété par d zonotopes $Z_{d,d}$ unités, soit une tuile $Z_{d,d}$ unité est posée afin de recouvrir le point le plus éloigné du zonotope et le pavage est complété par d zonotopes $Z_{d,d}$ unités (voir la figure 28). Les deux pavages ainsi obtenus sont symétriques. En effet, on passe d'un pavage à l'autre en effectuant une symétrie centrale par le centre de gravité du zonotope $Z_{d+1,d}$ unité.

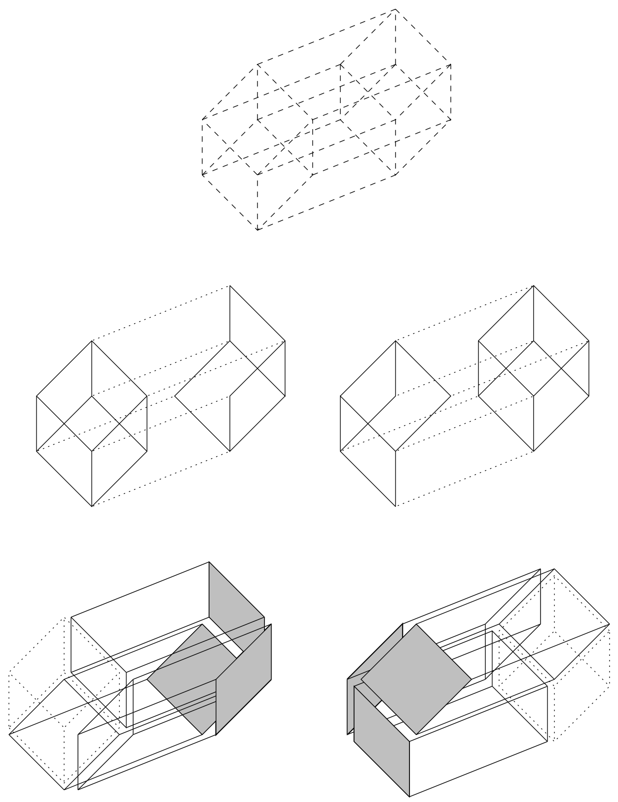

FIG. 28 – Flip en dimension 3.

Avec M. Latapy, M. Morvan et E. Rémila [117], nous cherchons à montrer la conjecture suivante :

Conjecture 4.1 *L'ensemble des pavages de zonotopes $Z_{D,d}$ par des tuiles formées de zonotopes $Z_{d,d}$ unités est connexe par flips de tuiles. Les flips* *intervenant dans cette conjecture sont de dimensions d et $d-1$.*

En d'autres termes, toutes les configurations d'un pavage de zonotope seraient atteintes en utilisant des flips de dimensions d et $d-1$. Ce résultat a été conjecturé comme faux dans le monde des matroïdes orientés [28] et comme vrai par les physiciens. Il a des implications nombreuses, aussi bien en physique (pour l'étude des pavages aléatoires) qu'en combinatoire [54, 177, 141]. La technique de preuve consiste à voir un pavage d'un zonotope $Z_{D,d}$ par des tuiles $Z_{d,d}$ unités comme le pavage d'un zonotope plus petit, c'est-à-dire avec l'un des coefficients égal à $\lambda_i - 1$, et le pavage de la zone que l'on a enlevée par des tuiles $Z_{d-1,d-1}$ unités. Cette méthode provient de techniques qui ont fait leurs preuves sur les treillis distributifs [51]. En particulier, elles sont extensivement étudiées dans la thèse de Caspard [37].

C'est d'ailleurs Morvan qui a formulé pour la première fois l'idée que le monde des pavages et celui des treillis ne sont pas si éloignés. Bien sûr, la notion de treillis de configuration des pavages était connue (voir Thurston et Rémila [164, 142]) mais le pavage de treillis donne de bonnes intuitions sur les treillis (voir l'article de Magnien, Phan et Vuillon [124]), et inversement, les techniques développées pour l'étude des treillis fournissent de bonnes idées pour les pavages [117]. Je pense pour ma part que nous sommes au tout début de cette approche.

4.4 Codage de zonotopes

Avec mon élève Chavanon et Latapy [43], nous nous sommes posé les questions suivantes : comment coder les pavages de zonotopes dans un ordinateur ? Quelle est l'information minimale pour reconstruire un pavage de zonotope ?

Cette étude porte plus particulièrement sur les pavages de zonotope $Z_{D,2}$ (pavage $D \to 2$), c'est-à-dire qu'elle porte sur les pavages d'une partie bornée du plan provenant d'un zonotope. Nous nous intéressons en particulier aux pavages par des losanges d'une partie convexe du plan. Une façon agréable de coder les pavages consiste à construire le graphe dual du pavage (voir la figure 29). Chaque tuile du pavage est représentée par un sommet du graphe dual. On place une arête entre les sommets s et s' si les tuiles ($t(s)$ et $t(s')$) partagent un côté (mais attention si $t(s)$ et $t(s')$ partagent uniquement un sommet, il n' y a pas d'arête entre s et s' sur le graphe dual). Dans ce graphe, la face infinie n'est pas prise en compte.

Le graphe dual code le pavage, mais une information importante sur l'ordre cyclique de l'agencement des sommets autour d'un sommet est perdue (c'est d'ailleurs la différence entre les cartes où l'ordre des sommets

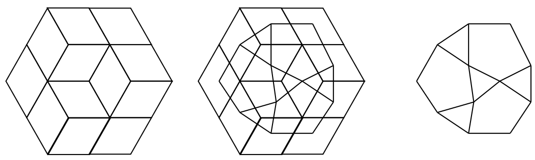

FIG. 29 – Pavage et graphe dual.

autour de chaque sommet est gardé (voir [48]) et les graphes duaux). Notre algorithme permet de reconstruire le pavage de zonotope en rajoutant juste une information sur le sommet origine du graphe dual (sommet associé à une tuile du pavage qui recouvre le point origine du zonotope). L'information consiste à donner le vecteur le plus petit en angle polaire et le plus grand. Ensuite, les lignes de De Bruijn sont reconstruites à partir de considérations de plus court chemin reliant 2 points du bord du graphe dual. On appelle ligne de de Bruijn une ligne brisée reliant deux tuiles du bord du zonotope telle que chaque segment de droite de cette ligne coupe les côtés opposés des tuiles en leurs milieux (voir la figure 30).

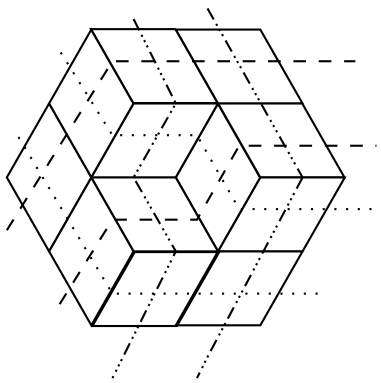

FIG. 30 – 3 familles de lignes de De Bruijn.

Les chemins sont alors regroupés par famille de lignes. De plus, à chaque famille est associé un vecteur du zonotope. Cette méthode permet de trouver l'ordre sur les vecteurs, information cruciale permettant d'effectuer la reconstruction du pavage. Il faut noter que notre algorithme permet en outre de caractériser les graphes duaux provenant de pavages. En effet, si la (re)construction échoue, alors le graphe ne correspond pas à un pavage de zonotope, et sinon le pavage est explicitement donné.

L'étape suivante sera de considérer des pavages par des losanges de parties bornées quelconques du plan. Un premier pas dans cette direction consiste à tenter de reconstruire le pavage d'une partie non convexe du plan donnée par l'union de deux zonotopes.

5 Systèmes hybrides

Ce dernier chapitre porte sur des modèles hybrides à la frontière entre pavages, mots unidimensionnels et bidimensionnels. Ces modèles donnent une façon originale d'étendre l'étude des mots de Sturm et des pavages. De plus, les méthodes employées dans les deux derniers paragraphes de ce chapitre proviennent de la théorie des automates.

5.1 Pavage avec une tuile non-connexe

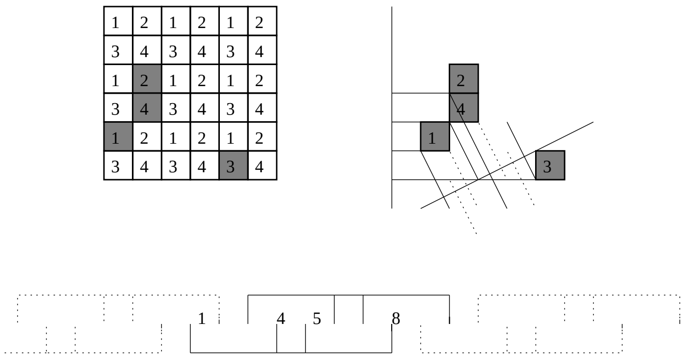

FIG. 31 – Pavage avec une pièce non connexe.

Une question ouverte proposée par Nivat consiste à se demander si une pièce non connexe (sur un réseau carré) pavant le plan par translation a des propriétés particulières. Ce problème peut se ramener au recouvrement des entiers par des pièces unidimensionnelles. En effet, il suffit de projeter les points entiers de $\mathbb{Z}^2$ sur deux droites de pente rationnelle de telle sorte que les images des points entiers associés à la pièce soient deux à deux distincts (voir la figure 31) et que chacune des pièces images pave la droite. Il faut noter là encore que de nombreux théoriciens des nombres ont travaillé sur le problème consistant à recouvrir les entiers par translations d'une même pièce (voir [165, 33, 129, 113]) mais que la structure des pavages des entiers par des pièces non connexes n'est pas bien comprise.

5.2 Recodage de k suites sturmiennes

Parmi les suites doubles introduites au chapitre 3, on peut remarquer que la suite double de complexité $mn + m + n$ est intimement liée à la suite double de complexité $mn + n$. La première suite double est donnée par deux rotations d'angles α et β avec une partition en trois intervalles de longueurs α, β et $1-\alpha-\beta$ (associés respectivement aux lettres 1,2 et 3), tandis que la seconde suite double est donnée par deux rotations d'angles α et β avec une partition en deux intervalles de longueurs α et $1-\alpha$ (associés respectivement aux lettres 1 et 0). En projetant la lettre 1 sur 1 et les lettres 2 et 3 sur 0, on passe de la suite de complexité $mn+m+n$ à la suite double de complexité $mn+n$.

Inversement, nous avons remarqué avec Berthé que le recodage de la suite double de complexité $P(m,n) = mn+n$ par un certain transducteur permet de construire une suite double de complexité $P(m,n) = mn+m+n$. Avec Berstel [19], nous avons découvert des transducteurs qui permettent de passer de k suites sturmiennes de même angle à un codage de rotation par k intervalles (voir figure 32). Le transducteur permet à partir de la lecture d'un vecteur v contenant la i $^{\text{e}}$ lettre de chacune des k suites sturmiennes de déterminer la valeur de la i $^{\text{e}}$ lettre du codage de rotation. Il suffit pour cela de lire l'état d'arrivée de la flèche indexée par v.

Plus précisément, on peut noter que dans l'automate, une flèche indexée par un vecteur différent de $(0,\ldots,0)$ et $(1,\ldots,1)$ apparaît une et une seule fois. Ainsi les états d'arrivée et de départ de cette flèche sont déterminés par le vecteur. On note $A(v_0,\ldots,v_k)$ l'état d'arrivée de la flèche indexée par $v_0,\ldots,v_k$ dans l'automate (voir la figure 32).

Le cercle unité est partitionné en $k+1$ intervalles de la forme $B_i = [\beta_i, \beta_{i+1}[$ avec $\beta_0 = 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{k+1} = 1$. Soit u le mot infini défini par

$$I(x)I(x+\alpha)I(x+2\alpha)\cdots I(x+n\alpha)\cdots,$$

où $I(y) = i$ si y mod $1 \in B_i$. Soit s_k le k $^{\text{e}}$ mot de Sturm défini par

$$J_k(x)J_k(x+\alpha)J_k(x+2\alpha)\cdots J_k(x+n\alpha)\cdots,$$

où $J_k(y) = 1$ si y mod $1 \in [\beta_k, \beta_k+\alpha[$ et 0 sinon.

Théorème 5.1 (Berstel, Vuillon) *Le mot infini u et les $k+1$ mots sturmiens s_i sont reliés par*

$$A(s_0(n),\ldots,s_k(n)) = u(n)$$

pour tout $n \geq n_0$, où n_0 est le plus petit entier tel que $\{s_0(n),\ldots,s_k(n)\}$ contienne au moins un 0 et au moins un 1. Pour $n < n_0$ la valeur $u(n)$ est le départ de la flèche indexée par $\{s_0(n),\ldots,s_k(n)\}$.

Il faut noter que les transducteurs intervenants dans ce codage sont très symétriques et que le même transducteur permet de coder tous les codages de rotation sur k intervalles indépendamment de la partition (pour k fixé).

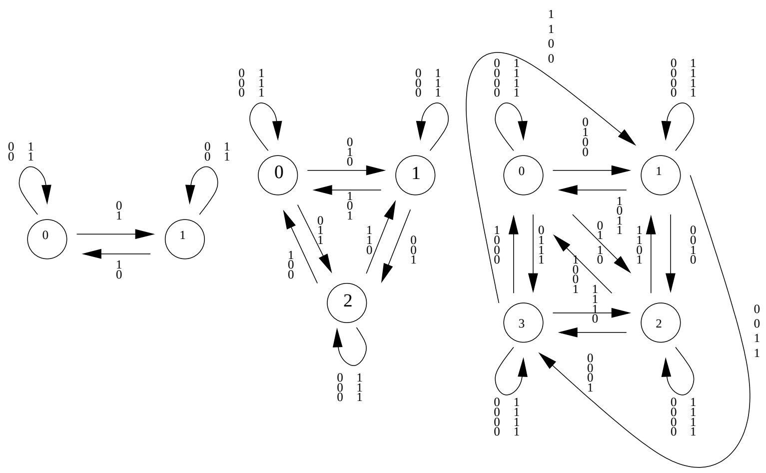

FIG. 32 – Transducteurs pour $k = 2, 3, 4$.

5.3 Tas de pièces

Ce dernier modèle utilise des arrangements de pièces selon le jeu Tetris. Le problème consiste à évaluer le comportement d'une classe de systèmes à événements discrets. En particulier, le modèle proposé permet de modéliser par tas de pièces certains réseaux de Petri. D'un point de vue informatique ce champ de recherche est à la confluence des recherches sur les monoïdes de traces, les réseaux de Petri, les tas de pièces et les systèmes dynamiques. Les travaux de Bacelli, Mairesse, Gaubert et Gaujal montrent la richesse de ce domaine en présentant des approches discrètes, probabilistes et systèmes dynamiques de ces problèmes [80]. Pour une problématique voisine, il faut lire les articles de Viennot sur les empilements de pièces [169]. Enfin, l'étude du degré de parallélisme dans les monoïde de commutation [126, 149] et l'approche probabiliste de C. Kenyon pour les algorithmes de mise en boîte [98, 99, 102] sont des thématiques proches de nos travaux.

Nous allons d'abord exposer un problème d'ordonnancement classique qui se recode par des tas de pièces : étant donné deux tâches partageant la même machine et pouvant être effectuée en parallèle, on cherche à minimiser le temps d'occupation de la machine. Un diagramme de Gantt permet de visualiser les temps d'exécution de chaque tâche et peut être vu après rotation comme un empilement de pièces. Les pièces représentent les durées d'exécution de chaque tâche. Le tas de pièces est construit en faisant tomber chaque pièce le plus bas possible (ce mécanisme est apparenté au jeu de Tetris) (voir la figure 33). Optimiser le temps d'utilisation de la machine revient donc à construire des tas de pièces les plus compacts possibles et tels que la croissance du tas de pièces soit la plus lente possible.

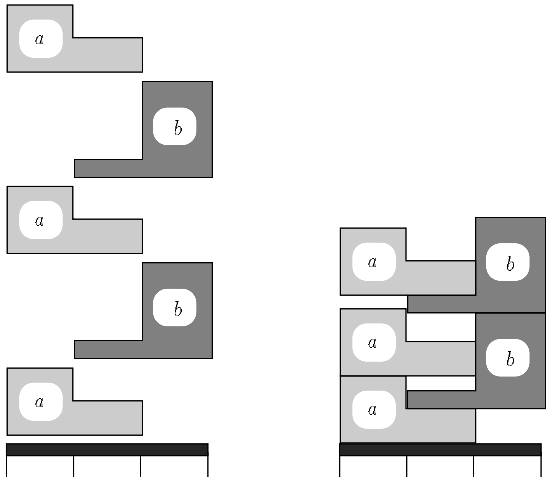

FIG. 33 – Tas de pièces.

En termes mathématiques, on cherche à calculer les exposants de Liapunov associés à la croissance du tas de pièces. Plus précisément, si $y(w)$ est la hauteur du tas de pièces associé au mot w alors la croissance optimale est donnée par la limite suivante $\rho_{\min} = \limsup_n \min_{w \in \mathcal{A}^n} \frac{y(w)}{n}$. Un mot u infini sera optimal si $\lim_n \frac{y(u[n])}{n}$ où $u[n]$ est le préfixe de longueur n de u, est égale à $\rho_{\min}$.

Gaujal a étudié le problème d'ordonnancement suivant (problème de job-shop) : étant donné deux tâches à accomplir, la première utilise un temps $\alpha_1 + \alpha_2$ et la seconde un temps $\beta_1 + \beta_2$. La contrainte est la suivante : si l'on effectue la tâche 1, il faut attendre un temps α_1 avant d'entreprendre la tâche 2 et un temps $\alpha_1 + \alpha_2$ pour faire la tâche 1. Inversement, si l'on effectue la tâche 2 il faut attendre un temps β_1 avant d'entreprendre la tâche 1 et un temps $\beta_1 + \beta_2$ pour faire la tâche 2. Les contraintes sont données par un réseau de Petri et se codent facilement par les pièces suivantes (voir la figure 34). Afin d'optimiser l'utilisation de la machine, Gaujal montre que les tâches à accomplir sont données par un mot périodique équilibré (Voir [79]). Cela revient à considérer le tas de pièces le plus compact possible avec les 2 pièces de la figure 34.

Une question naturelle est de considérer des pièces quelconques et de calculer le mot infini donnant l'empilement de pièces le plus compact. Avec Mairesse dans [125], nous avons prouvé qu'il existe un empilement le plus

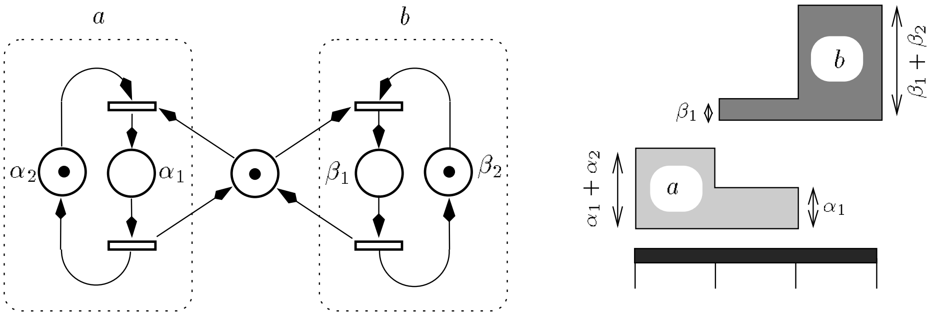

FIG. 34 – Réseau de Petri et pièces.

compact possible donné soit par un mot périodique équilibré soit par un mot de Sturm (apériodique et équilibré).

Théorème 5.2 (Mairesse, Vuillon) *Soit un tas de pièces avec deux pièces. Il existe un optimum donné soit par un mot périodique équilibré, soit par un mot de Sturm.*

Les méthodes utilisées font appel à l'algèbre (max,+). En effet, la hauteur d'un tas de pièces n'est rien d'autre que le produit des matrices associées aux pièces dans cette algèbre. Puis par des techniques de complétion de pièces, on trouve en considérant le profil supérieur du tas de pièces et son évolution selon les pièces ajoutées soit des automates (max,+) finis, soit une évolution donnée par des mots de Sturm. Il faut noter que dans le tas de pièces précédent, si α_1 et β_1 sont nuls et si α_2 et β_2 sont rationnellement indépendants, alors la séquence optimale est donnée par un mot de Sturm (voir la figure 35).

Bousch et Mairesse dans [30] ont donné une démonstration du même résultat en utilisant les formes topicales et les mesures sturmiennes. D'autre part, si les pièces sont des polyominos avec des hauteurs rationnelles alors d'après un résultat de Gaubert et Mairesse [78] l'optimum est toujours périodique quel que soit le nombre de pièces dans le tas.

Les tas de pièces sont bien plus que l'étude mathématique du jeu de Tetris. Ils permettent de modéliser des problèmes d'ordonnancement et aussi d'étudier les produits infinis de matrices dans l'algèbre $(\max,+)$. Dans le même esprit, les techniques de Bousch et Mairesse [30] ont permis de réfuter une conjecture de Lagarias et Wang [114] qui affirmait que le rayon spectral usuel d'un produit infini de matrices est toujours atteint par le rayon spectral d'un produit périodique de matrices. Là encore, l'existence d'un produit de matrices agencé selon un mot de Sturm a été l'élément crucial pour réfuter

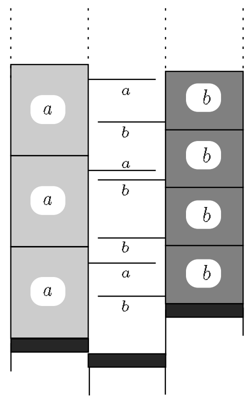

FIG. 35 – Pièces et mots de Sturm.

cette conjecture.

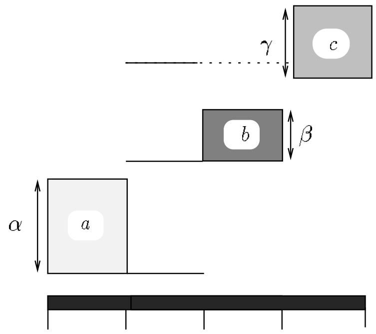

FIG. 36 – Pièces pour billard cubique.

En conclusion, il reste beaucoup de travail pour comprendre les tas de pièces avec plus de 3 pièces et des hauteurs irrationnelles. On peut par exemple obtenir des suites de billard cubique à partir du tas de pièces de la figure 36 avec α, β et γ rationnellement indépendants. Mais le problème général avec trois pièces quelconques est encore ouvert.

Je pense d'autre part que les tas de pièces permettent une vision unifiée des généralisations des mots de Sturm : par exemple, pour trois pièces, il existe des optima qui sont, soit des suites de billards cubiques ([125]), soit des rotations sur le cercle unité avec une partition en trois intervalles (d'après les travaux en cours de Bousch et Mairesse) et certainement d'autres mots sur trois lettres qui seront de bons candidats comme généralisations des mots de Sturm.

6 Conclusion générale

L'objectif de ce mémoire était bien sûr de présenter mes travaux en les situant par rapport aux courants de recherche en informatique théorique. Le second but consistait à sensibiliser le lecteur aux liens profonds entre mathématiques discrètes et informatique.

Ainsi l'étude des propriétés des mots de Sturm a donné l'équilibre généralisé et une nouvelle caractérisation par mots de retour de ces objets. Ces deux aspects permettent de mieux comprendre la combinatoire des mots mais aussi enrichissent les domaines que sont l'infographie et la théorie des pavages de la droite. Cette recherche peut être vue comme un travail préparatoire à l'écriture d'algorithmes efficaces de reconnaissance de droites discrètes. Dans le même esprit, l'introduction des suites doubles provenant du codage de plans discrets et l'étude des systèmes dynamiques discrets engendrant ces suites doubles mènera certainement à une compréhension en profondeur des plans discrets. Il est d'ailleurs intéressant de voir apparaître dans cette étude des généralisations de concepts bien connus en combinatoire comme la complexité des mots infinis, les systèmes dynamiques discrets et les palindromes. L' enjeu consiste, en introduisant de nouveaux concepts, à démonter les mécanismes de problèmes typiquement discrets provenant de l'informatique théorique. Par exemple, le lien établi entre la théorie des automates et la combinatoire des suites doubles est prometteur pour forger de nouveaux outils d'analyse des suites doubles et des plans discrets. Enfin, retrouver les mots de Sturm dans des problèmes d'optimisation est très satisfaisant. D'ailleurs, détecter et comprendre les mécanismes d'apparitions de ces mots dans les problèmes de l'informatique sera dans les prochaines années, à lui seul, un domaine de recherche riche et prometteur.

Références

[1] P. Alessandri, V. Berthé, *Three distance theorems and combinatorics on words*, Enseig. Math., **44** (1998), 103–132.

[2] J.-P. Allouche, M. Baake, J. Cassaigne and D. Damanik, *Palindrome complexity*, to appear in Theoret. Comput. Sci.

[3] J.-P. Allouche and J. Shallit, *Sums of digits, overlaps, and palindromes*, Discrete Math. and Theoret. Comput. Sci., **4** (2000), 1–10.

[4] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec and L. Q. Zamboni, *Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions,* to appear in J. Number Theory.

[5] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Volume 2 of the Encyclopedia of Mathematics and its applications. Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[6] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa and J.-I. Tamura, *Complexity of sequences defined by billiards in the cube*, Bull. Soc. Math. France, **122** (1994), 1–12.

[7] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$,* Bull. Soc. Math. France, **119** (1991), 199–215.

[8] M. Baake, J. Hermisson and P. Pleasants, *The torus parametrisation of quasiperiodic LI-classes*, J. Phys. A : Math. Gen., **30**, (1997), 3029–3056.

[9] Y. Baryshnikov, *Complexity of trajectories in rectangular billiards*, Comm. Math. Phys., **174** (1995), 43–56.

[10] M.-P. Béal, *Codage symbolique*, habilitation à diriger des recherches, Université Marne-la-vallée, 2001.

[11] D. Beauquier and M. Nivat, *Tiling the plane with one tile,* Proc. of the 6th Ann. Symp. on Comp. Geometry ACM Berkeley, (1990), 128–138.

[12] D. Beauquier, M. Nivat, E. Rémila and M. Robson, *Tiling figures of the plane with two bars*, Computational Geometry. Theory and Applications, **5**, (1995), 1–25.

[13] R. Berger, *The indecidability of the domino problem*, Mem. of the Amer. Math. Soc., **66** (1966).

[14] J. Berstel, *Fibonacci words - a survey,* In The book of L, Springer-Verlag, 1986.

[15] J. Berstel, *Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés* dans Mots, Lang. Raison. Calc., Editions Hermès, Paris, (1990), 298–309.

[16] J. Berstel, *Recent results on extensions of sturmian words*, Preprint IGM, (2002).

[17] J. Berstel et P. Séébold, *Morphismes de Sturm,* Bull. Belg. Math. Soc., **1** (1994), 175–189.

[18] J. Berstel and P. Séébold, *Sturmian words,* In M. Lothaire, Algebraic combinatorics on Words, (2001), To appear.

[19] J. Berstel and L. Vuillon, *Coding rotations on intervals*, to appear in Theoret. Comput. Sci..

[20] V. Berthé, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes*, Theoret. Comput. Sci., **165** (1996), 295–309.

[21] V. Berthé, *Etude arithmétique et dynamique de suites algorithmiques*, Habilitation à diriger des recherches, Université Aix-Marseille II, 1999.

[22] V. Berthé and R. Tijdeman, *Balance properties of multi-dimensional words*, Theoret. Comput. Sci., To appear.

[23] V. Berthé and L. Vuillon, *A two-dimensional generalization of Sturmian sequences: tilings and rotations*, Discrete Math., **223** (2000), 27–53.

[24] V. Berthé and L. Vuillon, *Suites doubles de basse complexité*, J. Théor. des Nombres de Bordeaux, **12** (2000), 179–208.

[25] V. Berthé and L. Vuillon, *Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences*, J. Autom. Lang. Comb., **6** (2001), 121–138.

[26] *Introduction to finite automata and substitution dynamical systems*, V. Berthé, S. Férenczi, C. Mauduit, A. Siégel eds, Preprint IML 2001–43.

[27] G. Bertrand, *New notions for discrete topology*, Lecture Notes in Comput. Sci., 1568, Springer-Verlag, (1996), 295–307.

[28] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. M. Ziegler, *Oriented matroids*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 46, Cambridge University Press, 1993.

[29] O. Bodini, *Approches combinatoire et algébrique de problèmes de pavage*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1999.

[30] T. Bousch and J. Mairesse, *Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris Heaps, and the finiteness conjecture*, to appear in Journal of the AMS.

[31] M. Bousquet-Mélou, *Combinatoire énumérative*, Habilitation à diriger des recherches, Université Bordeaux I, 1996.

[32] M. J. Bresenham, *Algorithm for computer control of a digital plotter*, IBM System Journal, vol. 4, (1965), 25–30.

[33] N. G. de Bruijn, *Some direct decompositions of the set of integers*, Math. Comp., **18** (1964), 537–546.

[34] N. G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane I and II*, Indag. Math., **43** (1981), 38–52 and 53–66.

[35] N. G. de Bruijn, *Updown generation of Penrose tilings*, Indag. Math., **51** (1989), 385–407.

[36] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Discrete Math., **6** (1973), 210–219.

[37] N. Caspard, *étude structurelle et algorithmique de classes de treillis obtenus par duplications*, Thèse de doctorat, Université Paris I, 1998.

[38] J. Cassaigne, *Ideas for a proof of Rauzy's conjecture on the recurrence functions of infinite words,* talk in Rouen "Words 1999".

[39] J. Cassaigne, *Double sequences with complexity* $mn+1$, J. Auto. Lang. Comb., **3**, 153–170, (1999).

[40] J. Cassaigne, *Subword complexity and periodicity in two or more dimensions*, Developments in Language Theory. Foundations, Applications and Perspectives (DLT'99), Aachen (Allemagne), World Scientific, 14–21, (2000).

[41] J. Cassaigne, S. Ferenczi and L. Q. Zamboni, *Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences,* Ann. Inst. Fourier, **50** (2000), no. 4, 1265–1276.

[42] M.G. Castelli, F. Mignosi and A. Restivo, *Fine and Wilf's theorem for three periods and a generalization of Sturmian words,* Theoret. Comp. Sci., **218** (1997), 45–82.

[43] F. Chavanon, M. Latapy and L. Vuillon, *Zonotopes and dual graphs*, in preparation.

[44] J.-M. Chassery et A. Montanvert, *Géométrie discrète en analyse d'images*, Edition Hermès 1991.

[45] J.-M. Chassery and J. Vittone, *Coexistence of tricubes in digital naive plane*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1347, Springer-Verlag, (1997), 99–112.

[46] J.-M. Chassery and J. Vittone, (n,m)*-cubes and farey nets for naive planes*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1568, Springer-Verlag, (1999), 76–87.

[47] J. H. Conway and J. C. Lagarias, *Tiling with polyomioes and combinatorial group theory*, J. Combin. Theory A, **53** (1990), 183–208.

[48] R. Cori, *Cartes, hypercartes et leurs groupes d'automorphismes*, In Seminaire Lotharingien. Univ. Bordeaux 1, UER de Maths et d'Info, 1984.

[49] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington and P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequences* J. Théor. des Nombres de Bordeaux, **5** (1993), 123–137.

[50] K. Culik II and A. Salomaa, *On infinite words obtained by iterating morphisms*, Theoret. Compt. Sci., **19** (1982), 29–38.

[51] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to lattices and orders*, Cambridge University Press, 1990.

[52] I. Debled, *étude et reconnaissance des droites et plans discrets*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1995.

[53] N. Destainville, *Entropie configurationnelle des pavages aléatoires et des membranes dirigées*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1997.

[54] N. Destainville, R. Mossery and F. Bailly, *Fixed-boundary octogonal random tilings: a combinatorial approach*, J. Stat. Phys., **102** (2001), no 1/2, 147–190.

[55] X. Droubay, J. Justin and G. Pirillo, *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, Theoret. Comp. Sci., **255** (2001), 539–553.

[56] X. Droubay and G. Pirillo, *Palindromes and Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci., **223** (1999), 73–85.

[57] B. Durand, *Inversion of 2D cellular automata: somme complexity results*, MFCS'93, Lecture Notes in Comput. Sci., Springer-Verlag, (1993).

[58] B. Durand, Habilitation à diriger des recherches ENS-Lyon, 1998.

[59] B. Durand, *Tilings and quasiperiodicity*, Theoret. Comp. Sci., **221** (1999), 61–75.

[60] F. Durand, *Contributions à l'étude des suites et systèmes dynamiques substitutifs,* Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 1996.

[61] F. Durand, *A characterization of substitutive sequences using return words,* Discrete Math., **179** (1998), 89–101.

[62] F. Durand, *Sur les ensembles d'entiers reconnaissables*, J. Théor. des Nombres de Bordeaux, **10** (1998), 65–84.

[63] S. Elnitsky, *Rhombic tilings of polygons and classes of reduced words in coxeter groups*, J. Combin. Theory, Ser. A, **77** (1997), 193–221.

[64] V. Elser, *Solution of the dimer problem on a hexagonal lattice with boundary*, J. Phys. A: Math. Gen., **17** (1984), 1509–1513.

[65] C. Epifanio, P. Mignosi and M. Koskas, *On a conjecture on bidimensional words*, Prépublication 1999.

[66] I. Fagnot and L. Vuillon, *Generalized balances in Sturmian words*, to appear in Discr. Appl. Math..

[67] S. Ferenczi, *Les transformations de Chacon: combinatoire, structure géométrique, lien avec les systèmes de complexité $2n+1$*, Bull. Soc. Math. France, **123** n 2 (1995), 271–292.

[68] S. Ferenczi, *Complexity of sequences and dynamical systems*, Discrete Math., **206** (1999), 145–154.

[69] O. Figueiredo, *Advances in discrete geometry applied to the extraction of planes and surfaces from 3D volumes*, Thèse de doctorat, Université de Lausanne (Suisse), 1999.

[70] N. J. Fine and H. S. Wilf, *Uniqueness theorem for periodic functions*, Proc. Am. Math. Soc., **16** (1965), 109–114.

[71] M. E. Fisher, *Statistical mechanics of dimers on a plane lattice*, Phys. Rev., **124** (1961), 1664–1672.

[72] J.-C. Fournier, *Pavages des figures planes sans trous par des dominos: fondement graphique de l'algorithme de Thurston, parallélisation, unicité et décomposition*, Theoret. Comput. Sci., **159** (1996), 105–128.

[73] J.-C. Fournier, *Tiling pictures of the plane with dominoes*, Discrete Math., **165/166** (1997), 313–320.

[74] A.S. Fraenkel, *Complementing and exactly covering sequences*, J. Combin. Theory, Ser. A, **14** (1973), 8–20.

[75] J. Françon, *Sur la topologie d'un plan arithmétique*, Theoret. Comput. Sci., **156** (1996), 159–176.

[76] J. Françon, J. M. Schramm et M. Tajine, *Recognizing arithmetic straight lines and planes,* Lecture Notes in Comput. Sci. 1176, Springer-Verlag, (1996), 141–150.

[77] C. Frougny, *Numeration systems,* In M. Lothaire, Algebraic combinatorics on Words, (2002), To appear.

[78] S. Gaubert and J. Mairesse, *Performance evaluation of times Petri nets using heaps of pieces*, In P. Bucholz and M. Silva editors, Petri

Nets and Performance Models (PNPM'99), IEEE Computer Society, (1999), 158–169,

[79] B. Gaujal, *Optimal allocation sequences of two processes sharing a resource*, Discrete Event Dynamics Systems, **7** (1997), 327–354.

[80] B. Gaujal, *Convexité discrète et régularité; application au contrôle des systèmes à événements discrets*, Habilitation à diriger des recherches, LORIA et INRIA, 2001.

[81] Y. Gérard, Local configurations of digital hyperplanes Lecture Notes in Comput. Sci., Springer-Verlag **1568** (1997), 65–75.

[82] Y. Gérard, *Contribution à la géométrie discrète*, Thèse de doctorat, Université Auvergne, 1999.

[83] Y. Gérard, *Les droites discrètes de* $\mathbb{Z}^2$, CNRIUT'99 IUT d'Aix-en-Provence, vol. 2, (Sciences pour l'ingénieur, Informatique mathḿatiques, Biologie-biochimie-chimie), l'Harmattan 1999, 69-80.

[84] Y. Gérard, *A question of digital linear algebra*, actes du DGCI 2000, Lecture Notes in Comput. Sci., Springer Verlag.

[85] D. Giammarresi and A. Restivo, *Two-dimensional languages*, In A. Salomaa and G. Rozenberg editors, Handbook of formal languages, volume 3, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 215–267.

[86] R. L. Graham, *Covering the positive integers by disjoint sets of the form* $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \cdots\}$, J. Combin. Theory Ser. A, **15** (1973), 354-358.

[87] B. Grumbaum and G. C. Shepard, *Tilings and patterns*, W.H. Freeman, New York, 1987.

[88] *Hand Book of Formal Languages*, A. Salomaa and G. Rozenberg editors, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[89] G. A. Hedlund and Morse, *Symbolic dynamics II: Sturmian trajectories*, Amer. J. Math., **62** (1940), 1–42.

[90] A. Hof, *On diffraction by aperiodic structures*, Comm. Math. Phys., **169** (1995), 25–43.

[91] C. Holton and L. Q. Zamboni, *Descendants of primitive substitutions,* Theory Comput. Systems 32, (1999), 133–157.

[92] P. Hubert, *Well balanced sequences*, Theoret. Comput. Sci., **242** (2000), 91-108.

[93] S. Ito and M. Kimura, *On Rauzy fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math., **8** (1991), 461–486.

[94] J. Justin and G. Pirillo, *Episturmian words and episturmian morphisms*, Preprint 2000.

[95] J. Justin and L. Vuillon, *Return words in Sturmian and episturmian words,* RAIRO Theoret. Inform. Appl., **34** (2000), 343–356.

[96] P. W. Kasteleyn, *The statistics of dimers on a lattice*, Physica, **27** (1961), 1209–1225.

[97] M. Keane, *Interval exchange transformations*, Math. Zeit., **141** (1975), 25–31.

[98] C. Kenyon, *Algorithmes de pavages et de mise en boîte, et algorithmes avec données bruitées*, Habilitation à diriger des recherches, LIP ENS-Lyon, 1996.

[99] C. Kenyon, *Best-fit, bin-packing with renom order*, 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algoriths, (1996).

[100] C. Kenyon et R. Kenyon, *Comment paver des polygones avec des barres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), no. 12, 1319–1322.

[101] C. Kenyon and E. Rémila, *Perfect matchings in the triangular lattice*, Discrete Math., **152** (1996), 191–210.

[102] C. Kenyon, Y. Rabani and A. Sinclair, *Biased renom walks, Lyapunov functions and stochastic analysis of best fit bin packing*, J. of Algorithms, (1996).

[103] C. Kenyon, D. Randall and A. Sinclair, *Matchings in lattice graphs*, J. of Stat. Phys., (1996).

[104] R. Kenyon, *Self-similar tilings*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1990.

[105] R. Kenyon, *Rigidity of planar tilings*, Invent. Math., **107** (1992), 637–651.

[106] R. Kenyon, *Tiling a polygon with parallelograms*, Algoritmica, **9** (1993), 382–397.

[107] R. Kenyon, *The construction of self-similar tilings*, Geom. And Func. Analisys, **6** (1996), 417–488.

[108] R. Kenyon, *Local statistics of lattice dimers*, Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. et Stat., **33** (1997), 591–618.

[109] R. Kenyon, Habilitation à diriger des recherches, Laboratoire de Topologie, Université de Paris-Sud, 1998.

[110] R. Kenyon and J. Smillie, *Billiards on rational triangles*, Comment. Math. Helv. **75** (2000), 65–108.

[111] R. Kenyon and A. Vershik, *Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms*, Erg. Th. And Dyn. Syst., **18** (1998), 357–372.

[112] G. Kuperberg, *Symmetries of plane partitions and the permanent-determinant method* , J. Combin. Theory, Ser. A, **68** (1994), 115–151.

[113] J. C. Lagarias and S. Szabó, *Universal spectra and Tijdeman's conjecture on factorization of cyclic groups*, J. Fourier Anal. Appl., **7** (2001), no. 1, 63–70.

[114] J. C. Lagarias and Y. Wang, *The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices*, Linear Algebra Appl., **214** (1995), 17–42.

[115] M. Latapy, *Generalized integer partitions, Tilings of Zonotopes and Lattices*, Lecture Notes in Comput. Sci., proceedings of FPSAC'00, (2000).

[116] M. Latapy, R. Mantaci, M. Morvan and H.D. Phan, *Structure of some sand piles model,* Theoret. Comput. Sci., **262** (2001), 525–556.

[117] M. Latapy, M. Morvan, E. Rémila and L. Vuillon *Zonotopes*, En préparation.

[118] M. Latapy and H.D. Phan, *The lattice of integer partitions and its infinite extension*, Proceedings of ORDAL'99, Lecture Notes in Comput. Sci., To appear.

[119] D. Lind and B. Marcus, *Symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, 1995.

[120] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, 1983.

[121] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridges University press, To appear.

[122] A. de Luca, *Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics*, Theoret. Comput. Sci., **183** (1997), 45–82.

[123] D. Mac-Mahon, *Combinatory analysis*, Cambridge University Press, 1915-1916. Reprinted: Chelsea, New-York, 1960.

[124] C. Magnien, H. D. Phan and L. Vuillon, *An extension of the model of Chip Firing Game*, to appear in Discrete Math. and Theoret. Comput. Sci., procedings AA (DM-CCG), (2001), 229–244.

[125] J. Mairesse and L. Vuillon, *Asymptotic behavior in a heap model with two pieces*, Theoret. Comput. Sci., To appear.

[126] A. Mazurkiewicz, *Concurrent program schemes and their interpretations*, in DAIMI, PB 78, Aarus University, 1977.

[127] A. Messaoudi, *Fractal de Rauzy*, Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, (1995).

[128] R. Mosseri, *Contribution to the theory of quasicrystal approximants*, Springer Procedings in Physics, Vol 32: Universalities in Condensed Matter, R. Jullien, L. Peliti, R. Rammal, N. Bocarra Eds, 1988.

[129] D. J. Newman, *Tesselation of integers*, J. Number. Theory, **9** (1977), 107–111.

[130] J.-J. Pansiot, *Bornes inférieures sur la complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes* , Lecture Notes in Comput. Sci., **166** (1984), 230–240.

[131] J.-J. Pansiot, *Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés*, in Automata, languages and Programming (Antwerp, 1984), Lecture Notes in Comput. Sci., **172** (1984), 380–389.

[132] R. Penrose, *Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane*, Math. Intelligencer 2, (1979), no. 1, 32–37.

[133] H. D. Phan, *Structure ordonnées et dynamiques de piles de sable*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1999.

[134] N. Priebe, *Towards a characterization of self-similar tilings in terms of derived Voronoï tessellations*, Geom. Dedicata, **79** (2000), no. 3, 239–265.

[135] J. Propp, *Lattice structure for orientations of graphs*, Preprint, (1993).

[136] J. Propp, *Generating random elements of a finite distributive lattice*, The Wilf Festschrift (Philadelphia, PA, 1996). Electron. J. Combin. **4** (1997), no. 2, Research Paper 15, approx. 12 pp..

[137] M. Queffélec, *Subtitution dynamical systems - spectral analysis*, Lecture Notes Math., **1294**, Springer-Verlag, 1987.

[138] G. Rauzy, *Une généralisation du développement en fraction continue,* Sémin. Delange-Pisot-Poitou, 18e Année **1** (1977), 1501–1515.

[139] G. Rauzy, *échange d'intervalles et transformations induites,* Acta. Arith., **34** (1979), 315–328.

[140] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 147–178.

[141] V. Reiner, *The generalized Baues problem*, New perspectives in algebraic combinatorics (Berkeley, CA, 1996–97), 293–336, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[142] E. Rémila, *The lattice structure of the set of domino tilings of a polygon*, Proceedings of ORDAL'99, Lecture Notes in Comput. Sci., To appear.

[143] J.-P. Reveillès, *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithme*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 1991.

[144] J.-P. Reveillès, *Combinatorial pieces in digital lines and planes*, Actes Vision Geometry IV, Proceding SPIE, Colloquium in San Diego, 1995.

[145] J.-P. Reveillès and I. Debled, *A new approch to digital plane*, Actes Vision Geometry II, Proceding SPIE, Colloquium in Boston, 1994.

[146] E. J. Robinson, *The dynamical properties of Penrose tilings,* Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 4447–4464.

[147] R. M. Robinson, *Undecidability and non-periodicity for tilings of the plane*, Invent. Math., **12** (1971), 177–209.

[148] G. Rote, *Sequences with subword complexity* $2n$, J. Number Theory, **46** (1994), 196–213.

[149] N. Saheb, *Concurrency measure in commutation monoids*, Discr. Appl. Math., **24** (1989), 223–236.

[150] J. W. Sander and R. Tijdeman, *Low complexity functions and convex sets in* $\mathbb{Z}^k$, Math. Z., **233** (2000), 205–218.

[151] J. W. Sander and R. Tijdeman, *The complexity of functions on lattices*, Theoret. Comput. Sci., To appear.

[152] J. W. Sander and R. Tijdeman, *The rectangle complexity of functions on two-dimensional lattices*, Theoret. Comput. Sci., **246**(2000), 195–225.

[153] J. M. Schramm, *Coplanar tricubes*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1347, Springer-Verlag, (1997), 87–98.

[154] M. Senechal, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.

[155] P. Séébold, *Fibonacci morphism and Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci., **88** (1991), 367–384.

[156] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias and J. W. Cahn, *Metallis phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Lett., **53** (1984), 1951–1953.

[157] D. Simplot, *Langages de mots de figures, monoïdes inversifs et langages de mots à deux dimensions*, Thèse de doctorat, Université Lille, 1997.

[158] J. Sivardière, *La symétrie en mathématiques, physique et chimie*, Presse Universitaire de Grenoble, 1995.

[159] Th. Skolem, *Über einige eigenschafen der zahlenmengen* $\lceil \alpha n + \beta \rceil$ *bei irrationalem* α *mit einleitenden bemerkungen über einige kombinatorische probleme*, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim), **30** (1957), 118–125.

[160] B. Solomyak, *Dynamics of self-similar tilings*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997), 695–738.

[161] R.P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memoirs of the ACM, **119**, (1972).

[162] R.P. Stanley, *Symmetries of plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A, **43** (1986), 103–113.

[163] H. Temperley and M. E. Fisher, *The dimer problem in statistical mechanics - an exact result*, Phil. Mag., **6** (1961), 1061–1063.

[164] W. Thurston, *Conway's tiling groups*, Amer. Math. Monthly, **95** (1990), 757–773.

[165] R. Tijdeman, *Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets*, In Number Theory Seminar Paris 1992-1993 S. David Ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 261–276.

[166] R. Tijdeman, *Exact covers of balanced sequences and Fraenkel's conjecture*, Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, Proc. Intern. Conf. Graz, Austria, Ed. by F. Halter-Koch and R.F. Tichy, Walter de Gruyter, Berlin etc., (2000), 467–483.

[167] R. Tijdeman, *Fraenkel's conjecture for six sequences*, Discrete Math., **222** (2000), 223–234.

[168] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panoramas et synthèse, SMF, Numéro 1, 1995.

[169] G. Viennot, *Problèmes combinatoires posés par la physique statistique*, Astérisque **121–122**, Société Mathématique de France, 1985.

[170] X. G. Viennot, *A survey of polyomino enumeration*, In P. Leroux and C. Reutenauer editors, Proceedings of the 4th conference Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, publications du LACIM **11**, (1992), 399–420.

[171] L. Vuillon, *Contribution à l'étude des pavages et des surfaces discrétisées,* Thèse de doctorat, Université de la Méditerrannée (Aix-Marseille II), 1996.

[172] L. Vuillon, *Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle,* Theoret. Comput. Sci., **209** (1998), 261–285.

[173] L. Vuillon, *Local configurations in discrete planes*, Bull. Belg. Math. Soc., **6** (1999), p. 625–636.

[174] L. Vuillon, *A characterization of Sturmian words by return words,* European J. Combin., **22** (2001), 263–275.

[175] L. Vuillon, *On the number of return words in infinite words with complexity* $2n+1$, Preprint LIAFA, 2000/15.

[176] H. Wang, *Proving theorems by pattern recognition II*, Bell System Technical Journal, **40** (1961), 1–41.

[177] G. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.

I. Fagnot and L. Vuillon, *Generalized balances in Sturmian words*, Discr. Appl. Math.

L. Vuillon, *A characterization of Sturmian words by return words,* European J. Combin.

L. Vuillon, *On the number of return words in infinite words with complexity* $2n+1$, Prépublication du LIAFA

J. Justin and L. Vuillon, *Return words in Sturmian and episturmian words,* RAIRO Theoret. Inform. Appl.

L. Vuillon, *Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle,* Theoret. Comput. Sci.

V. Berthé and L. Vuillon, *A two-dimensional generalization of Sturmian sequences: tilings and rotations*, Discrete Math.

V. Berthé and L. Vuillon, *Suites doubles de basse complexité*, J. Théor. des Nombres de Bordeaux

L. Vuillon, *Local configurations in discrete planes*, Bull. Belg. Math. Soc.

V. Berthé and L. Vuillon, *Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences*, J. Autom. Lang. Comb.

J. Berstel and L. Vuillon, *Coding rotations on intervals*, Theoret. Comput. Sci.

J. Mairesse and L. Vuillon, *Asymptotic behavior in a Heap Model with Two Pieces*, Theoret. Comput. Sci.