Combinatoire des motifs d'une suite sturmienne bidimensionnelle.

Laurent Vuillon
Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS-UPR 9016
Case 930, 163 avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9 France
e-mail : vuillon@iml.univ-mrs.fr

Résumé : *Nous étudions une généralisation des suites sturmiennes en construisant une "surface plissée", donnée par l'approximation d'un plan par trois sortes de faces carrées orientées suivant les trois plans de coordonnées. À cette surface, on associe par projection un pavage du plan par trois sortes de losanges. On définit sur ce pavage une fonction de complexité en comptant le nombre de motifs distincts d'une fenêtre de taille donnée. Nous donnons, en étudiant les prolongements des motifs, la forme explicite de cette fonction dans le cas d'une fenêtre triangulaire et d'une fenêtre en forme de parallélogramme.*

Mots clés : géométrie discrète, suites sturmiennes, combinatoire des motifs, complexité et pavages du plan.

Abstract : *We study a generalization of sturmian sequences by constructing a "stepped surface", given by a plane approximation with three kinds of square faces oriented according to the three coordinate planes. With a projection operation, we build a tiling of the plane by three kinds of diamonds. We define in this tiling a complexity function by counting the number of patterns in a given height window. We give the explicit form of this function in the case of triangular windows and parallelogram windows.*

Key words: discrete geometry, sturmian sequences, combinatorics on patterns, complexity and tilings of the plane.

1 Introduction.

Les suites sturmiennes, dont l'étude menée par Hedlund et Morse (voir [10], [11]) a débuté à la fin des années 30, ont de nombreuses caractérisations combinatoires et géométriques qu'il est intéressant de généraliser. La complexité d'une suite sur un alphabet fini est la fonction

p définie par : $p(n)$ est le nombre de blocs (facteurs) de longueur n qui apparaissent dans la suite. Une suite est dite sturmienne si sa fonction de complexité vérifie $p(n) = n + 1$ pour tout entier n. Remarquons qu'une telle suite est nécessairement binaire. Pour une suite quelconque, on démontre que, lorsqu'il existe n tel que $p(n) \leq n$, alors la suite est ultimement périodique. Les suites sturmiennes sont donc les suites non ultimement périodiques de complexité minimale. Pour une synthèse des résultats sur la complexité des suites infinies contenant une bibliographie très fournie, on peut se reporter à l'article de Allouche [2]. Il y a équivalence entre la caractérisation précédente des suites sturmiennes et le problème du billard dans le carré avec le codage suivant (voir [6], [15]) : on code une trajectoire de pente irrationnelle dans ce billard par une suite binaire selon les côtés rencontrés (les côtés opposés étant codés par la même lettre). On peut généraliser cette caractérisation en "jouant" au billard dans un cube. Ainsi Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura [3] ont établi, pour les suites de billard cubique, que la fonction de complexité est donnée par $p(n) = n^2 + n + 1$ pour une direction totalement irrationnelle. Baryshnikov [5] a d'ailleurs récemment exprimé la fonction de complexité dans des hypercubes en toutes dimensions. Hubert [12] s'est intéressé à l'étude du billard dans divers triangles et polygones rationnels (les angles des côtés consécutifs sont commensurables à π).

On peut aussi étudier les propriétés combinatoires des suites sturmiennes et en déduire une interprétation géométrique comme l'ont fait Arnoux et Rauzy [4] en utilisant les graphes des mots (ou graphes de Rauzy [15]). Ils ont étudié ces graphes afin de donner une interprétation géométrique d'une certaine classe de suites de complexité $p(n) = 2n + 1$.

Les suites sturmiennes sont aussi le codage des rotations d'angle α irrationnel, sur le cercle, avec la partition $[0, 1-\alpha]$ et $]1-\alpha, 1]$. Une des généralisations étudiée par Alessandri [1] consiste à étudier des rotations sur le cercle avec différentes partitions.

Cet article présente une caractérisation des suites sturmiennes comme approximation d'une droite de pente irrationnelle, par des segments dont les extrémités appartiennent au réseau carré. Nous utilisons une généralisation de cette construction : en construisant une surface plissée, par approximation d'un plan de normale totalement irrationnelle par des faces carrées orientées suivant les trois axes de coordonnées. A cette surface, on associe par projection un pavage du plan par trois sortes de losanges. A l'aide d'un codage de la direction des losanges, on définit une suite à double indice sur trois lettres. Nous définissons la fonction de complexité comme le nombre de motifs (généralisant la notion de mots pour une suite) distincts comptés à partir de deux sortes de fenêtres : des fenêtres triangulaires et des fenêtres en forme de parallélogramme "plaquées" sur le réseau. Nous étudions la combinatoire de ces motifs, c'est-à-dire les différents prolongements possibles. En étudiant géométriquement la surface plissée, on montre des propriétés intéressantes pour l'une des faces de l'approximation et pour l'un des losanges du pavage du plan. Il en découle de bonnes propriétés pour un des sens de prolongement des motifs. Nous donnons la forme explicite pour tout n de la fonction de complexité pour des motifs triangulaires et parallélogrammes; cela indépendamment de la direction de la normale au plan (il faut seulement que la direction soit totalement irrationnelle). Nous démontrons les théorèmes suivants à partir de la suite double associée à l'approximation d'un plan donné de normale totalement irrationnelle, le premier donne le

nombre de motifs triangulaires pour une fenêtre triangulaire de base n :

Théorème 3.2 : *Soient le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ et le codage sur l'alphabet $\{1,2,3\}$. Alors :*

$$\forall n \in I\!N,\ P_{\triangle}(n) = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

le deuxième donne le nombre de motifs en forme de parallélogramme pour une fenêtre en forme de parallélogramme de base m et de hauteur n :

Théorème 3.3 : *Soient le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ et le codage sur l'alphabet $\{1,2,3\}$. Alors :*

$$\forall (n,m) \in I\!N^2,\ P(n,m) = nm+n+m.$$

Dans cet article, la recherche de fonction de complexité est liée aux propriétés géométriques de l'approximation de plan. Il existe une grande classe de pavage construit suivant le même principe. Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on considére le réseau $\mathbb{Z}^n$ et l'on recherche les hypercubes ayant une intersection non vide avec un plan de normale totalement irrationnelle. Enfin, on projette l'ensemble des centres de ces hypercubes sur un plan de normale $(1,1,\cdots,1)$. On obtient, en reliant par des segments la projection des centres des hypercubes ayant une face en commun, un pavage du plan. Les pavages de Penrose peuvent en particulier être obtenus de cette façon (voir [8], [16]). A partir des outils développés dans le cadre de l'approximation de plan, on ouvre des pistes de recherche pour le calcul des fonctions de complexité de divers pavages du plan.

Un autre prolongement de ce travail serait de démontrer la conjecture suivante. Considérons un pavage par des losanges, où tous les motifs finis apparaissent une infinité de fois, ayant une fonction de complexité donnée par $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{\triangle}(n) = \frac{n^2+3n+2}{2}$ (ou bien $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ P(n,m) = nm+n+m$) alors il existe un plan de normale totalement irrationnelle tel que le pavage provient de la projection de l'approximation de ce plan. En d'autres termes, la réciproque des théorèmes donnés dans cet article doit certainement exister mais semble difficile à établir pour l'instant.

2 Suites sturmiennes.

2.1 Définition et caractérisation.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini (alphabet), on notera $\mathcal{A}^* = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{A}^k$ le monoïde libre sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$ muni de la concaténation. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite à valeur dans $\mathcal{A}$, on appelle $L(u)$ (langage de la suite u) l'ensemble des *facteurs* de u, c'est-à-dire les mots de la forme $u_i u_{i+1}\cdots u_{i+j}$. Il est immédiat que $L(u)$ est *factoriel* (tout facteur d'un mot de $L(u)$ est dans $L(u)$) et *prolongeable* (pour tout mot x, il existe une lettre a tel que le mot xa appartient au langage). On note $L_n(u)$ l'ensemble des facteurs de u de longueur n.

Définition 2.1 On appelle *fonction de complexité* de u la fonction $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par : $p(n) =$ Card $L_n(u)$.

On appelle *suite sturmienne* une suite sur un alphabet à deux lettres $\mathcal{A}$ ayant une complexité $p(n) = n + 1$ (nous considérons des suites indexées sur $\mathbb{Z}$ et pour éliminer quelques cas dégénérés, nous nous intéresserons à des *suites récurrentes* i.e. des suites dont chaque facteur apparaît une infinité de fois) et à des suites non périodiques. Il existe de nombreuses caractérisations de ces suites. En particulier il y a équivalence, pour des suites récurrentes et non périodiques, entre $p(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la propriété d'équilibre de ses facteurs : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x, y \in L_n(u)$ on a $||x|_a - |y|_a| \leq 1$ où $a \in \mathcal{A}$ et $|x|_a$ est le nombre de a dans le mot x (voir [10], [11], [9]).

On peut caractériser les suites sturmiennes par les *suites de billard carré.* Ces suites proviennent du codage d'un billard carré de coté 1, de départ le point $(0, y)$ avec $0 < y < 1$, de pente $-\alpha$ direction de la trajectoire. On code la trajectoire par le symbole 1 lorqu'elle touche l'un des cotés horizontaux et par 0 lorqu'elle touche l'un des cotés verticaux (la réflexion sur les bords est définie en utilisant une symétrie axiale à partir de la normale au bord). On ne s'occupe que des trajectoires infinies (c'est-à-dire qui ne finissent pas dans un coin du billard) et non périodiques (pente irrationnelle). On remarque aussi que les suites de billard rectangulaire sont, après normalisation, des suites de billard carré. De plus, deux suites de billard carré de même pente mais avec des points de départ différents ont même langage (voir [14] pour la preuve utilisant les rotations sur le tore, le passage au billard est alors immédiat).

Nous allons voir, plus loin, une autre caractérisation des suites sturmiennes provenant de l'approximation d'une droite de pente irrationnelle. Le but du paragraphe suivant est de présenter les outils mathématiques permettant de généraliser cette construction et de l'appliquer à l'approximation d'un plan.

2.2 Approximation d'une droite.

On considère dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, le réseau $\mathbb{Z}^2$ formé par des points de coordonnées entières. Soit α un nombre irrationnel positif et γ un nombre réel. Le but de la construction suivante est de donner une approximation de la droite d'équation $y = -\alpha x + \gamma$ par des segments, unités verticaux et horizontaux, commençant et finissant à des points de coordonnées entières. Les segments forment une ligne continue brisée la plus proche possible de la droite sans jamais la couper. Il existe deux approximations possibles : l'une en plaçant les segments aux points entiers les plus proches par valeur supérieure, l'autre par valeur inférieure. Nous traitons le cas de l'approximation par valeur supérieure. L'approximation de la droite est donnée par la méthode suivante, on calcule pour chaque n entier la hauteur h_n du n-ième segment horizontal :

$$h_n = \lceil -n\alpha + \gamma \rceil$$

où $\lceil x \rceil = \inf\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}$.
Tout le long de cet exposé, nous allons considérer l'approximation des droites de la forme $y = -\alpha x + \gamma$ avec α irrationnel, $\alpha > 1$. Cette hypothèse est purement technique; en effet, si $\alpha < 1$ moyennant la permutation des axes de coordonnées, on se retrouve dans le cas précédent.

Figure 1 : exemple d'approximation d'une droite.

2.2.1 Construction de la ligne brisée.

On place, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, un segment horizontal de longueur 1 commençant au point d'abscisse n et d'ordonnée h_n, finissant au point $(n+1, h_n)$. On relie ensuite la fin de ce segment horizontal au segment horizontal commençant en $(n+1, h_{n+1})$ par $|h_{n+1} - h_n|$ segments verticaux. On code les segments horizontaux de longueur 1 par la lettre 1, les segments verticaux de longueur 1 par la lettre 0 afin de définir une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ (voir la figure 1). L'hypothèse $\alpha > 1$ implique que dans la suite u le mot 11 n'apparaît pas. En effet pour tout nombre entier n, on a $h_n > h_{n+1}$. Cette construction est classique (voir [7]).

La suite u est définie par

$$u = \begin{cases} u_i = 1 & \text{pour } i = h_0 - h_j + j, \text{ et } j \in \mathbb{Z} \\ u_i = 0 & \text{pour } i = h_0 - h_j + j + 1, h_0 - h_j + j + 2, ..., h_0 - h_{j+1} + j, \text{ et } j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La suite u est sturmienne. On vérifie en effet aisément que c'est une suite de billard carré (de pente $-\alpha$ et de point initial $(0, \gamma \text{ modulo } 1)$).

Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0,1\}$. On note $\Lambda_k(v)$ l'ensemble des facteurs de v commençant par 1, finissant par 1 et contenant k symboles 1.

Proposition 2.1 *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite sturmienne sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et $x, y \in \Lambda_k(u)$ alors*

$$||x| - |y|| \leq 1.$$

Démonstration. Si $|x| = |y|$ c'est clair; supposons $|x| \leq |y|$ et soit w le préfixe de longueur $|x|$ de y. On a $|x|_1 = k$, et $|w|_1 \leq |y|_1 = k$, donc par propriété d'équilibre des facteurs d'une suite sturmienne $|w|_1 = k-1$. Si le préfixe w est suivi de 1 dans y alors $y = w1$ et c'est fini. Sinon, soit v le mot tel que : $1v = w0$; on a $|v| = |x|$ et $|v|_1 = k-2$ par propriété d'équilibre des facteurs d'une suite sturmienne, il y a contradiction.

$\diamondsuit$

Corollaire 2.2 *Soit $a \in \mathbb{Z}^*$, a fixé, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall n' \in \mathbb{Z}$, on a*

$$||h_n - h_{a+n}| - |h_{n'} - h_{a+n'}|| \leq 1.$$

Démonstration. Ce corollaire est la traduction géométrique de la proposition précédente. Pour $a \in \mathbb{N}^*$, dans l'approximation de la droite, il existe, à n fixé, un mot x contenant $a+1$ symboles 1 tel que la hauteur du premier 1 est h_n et la hauteur du dernier 1 est h_{a+n}. Le mot x s'écrit

$$x = 10^{h_n - h_{n+1}} 10^{h_{n+1} - h_{n+2}} \cdots 10^{h_{n+a-1} - h_{n+a}} 1.$$

De même, il existe, à n' fixé, un mot

$$y = 10^{h_{n'} - h_{n'+1}} 10^{h_{n'+1} - h_{n'+2}} \cdots 10^{h_{n'+a-1} - h_{n'+a}} 1.$$

On a $|x|_1 = a+1$ et $|y|_1 = a+1$ d'où $x, y \in \Lambda_{a+1}$. On a $|x|_0 = |h_n - h_{a+n}|$ et $|y|_0 = |h_{n'} - h_{a+n'}|$. Donc $|x| = a + 1 + |h_n - h_{a+n}|$ et $|y| = a + 1 + |h_{n'} - h_{a+n'}|$. Comme $x, y \in \Lambda_{a+1}$ alors $||x| - |y|| \leq 1$ cela implique que $||h_n - h_{a+n}| - |h_{n'} - h_{a+n'}|| \leq 1$. Pour a négatif, le raisonnement est le même en prenant à n fixé, un mot x contenant $|a| + 1$ symboles 1 tel que la hauteur du premier 1 est h_{n+a} et la hauteur du dernier 1 est h_n. Le mot s'écrit alors

$$x = 10^{h_{n+a} - h_{n+a+1}} 10^{h_{n+a+1} - h_{n+a+2}} \cdots 10^{h_{n-1} - h_n} 1.$$

$\diamondsuit$

Cette propriété de la représentation géométrique des mots de $\Lambda_k(u)$, où u est une suite sturmienne, est l'argument clé que nous utiliserons lors de l'approximation du plan.

3 Approximation d'un plan.

3.1 Construction de l'approximation.

On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, le réseau cubique de $\mathbb{R}^3$ formé par les points à coordonnées entières. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que $(1, \alpha, \beta)$ soient rationnellement indépendants, c'est-à-dire $l + m\alpha + n\beta = 0$ pour $(l, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \Rightarrow (l, m, n) = (0, 0, 0)$. Le but de la construction suivante est de donner une approximation du plan (noté $\mathcal{P}$) d'équation $z = -\alpha x - \beta y + \gamma$ par des faces unités dont les sommets appartiennent au réseau cubique. Les faces unités sont de trois types :

$E_1 = \{\lambda \vec{e_2} + \mu \vec{e_3} \mid (\lambda, \mu) \in [0, 1]\}$
$E_2 = \{\lambda \vec{e_1} + \mu \vec{e_3} \mid (\lambda, \mu) \in [0, 1]\}$
$E_3 = \{\lambda \vec{e_1} + \mu \vec{e_2} \mid (\lambda, \mu) \in [0, 1]\}$

Figure 2 : approximation d'un plan.

L'approximation du plan $\mathcal{P}$ est donnée par la méthode suivante. On calcule pour chaque n et m entiers la hauteur $H_{n,m}$ de la face de type E_3 d'abscisse n et d'ordonnée m :

$$H_{n,m} = \lceil -n\alpha - m\beta + \gamma \rceil$$

De même que pour l'approximation de la droite, nous considèrerons uniquement $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Cette hypothèse permet d'avoir des faces de type E_3 isolées, au sens où les faces de type E_3 n'ont pas d'arête en commun, $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \ : H_{n,m} > H_{n+1,m}$ et $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \ : H_{n,m} > H_{n,m+1}$, (voir la figure 2).

On place, pour chaque n, m, sur le réseau cubique une face de type E_3 d'abscisse n, d'ordonnée m et de hauteur $H_{n,m}$ notée $(n, m, H_{n,m})$. On relie, pour n fixé, chaque face de type E_3 $(n, m, H_{n,m})$ à la face de type E_3 $(n, m+1, H_{n,m+1})$ par $|H_{n,m+1} - H_{n,m}|$ faces de type E_2, $m \in \mathbb{Z}$. On relie, pour m fixé, chaque face de type E_3 $(n, m, H_{n,m})$ à la face E_3 $(n+1, m, H_{n+1,m})$ par $|H_{n+1,m} - H_{n,m}|$ faces de type E_1, $n \in \mathbb{Z}$. L'objet géométrique ainsi obtenu est appelé *surface plissée* $S_{\mathcal{P}}$. Cet objet a été étudié en particulier par Ito et Kimura [13].

La surface plissée $S_{\mathcal{P}}$ est entièrement déterminée par la position des faces E_3. En effet, si l'on connaît la position des faces de type 3 sur le réseau, alors par construction on sait placer les faces de type 1 et 2.

3.2 Propriété fondamentale.

Nous considérons la surface plissée $S_{\mathcal{P}}$ et la hauteur des faces isolées de type E_3 donnée par $H_{n,m}$. Si l'on considère, à m entier fixé, l'intersection du plan $((0, m, 0), \vec{e_1}, \vec{e_3})$ avec le plan $\mathcal{P}$ et avec la surface plissée $S_{\mathcal{P}}$, on retrouve l'approximation d'une droite d'équation

$z = -\alpha x - m\beta + \gamma$ par des segments dont les sommets appartiennent à un réseau carré. Cette approximation définit donc une suite sturmienne sur l'alphabet $\{1, 3\}$ et, en particulier, le corollaire 2.2 s'applique, soit $a \in \mathbb{Z}^*$, a fixé, $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \forall n' \in \mathbb{Z}$ on a

$$||H_{n,m} - H_{a+n,m}| - |H_{n',m} - H_{a+n',m}|| \leq 1.$$

De plus le langage de la suite sturmienne n'est fonction que de la pente $(-\alpha)$ de cette droite et non du point d'intersection $(-m\beta + \gamma)$ de cette droite avec l'axe $(m, \vec{e_3})$. Donc, quel que soit m, l'approximation de la droite $z = -\alpha x - m\beta + \gamma$ définit des suites ayant le même langage. D'où, soit $a \in \mathbb{Z}^*$, a fixé, $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \forall (n', m') \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$||H_{n,m} - H_{a+n,m}| - |H_{n',m'} - H_{a+n',m'}|| \leq 1.$$

Si l'on considère, à n entier fixé, l'intersection du plan $((n, 0, 0), \vec{e_2}, \vec{e_3})$ avec le plan $\mathcal{P}$ et la surface plissée $S_{\mathcal{P}}$, on retrouve l'approximation d'une droite d'équation $z = -\beta y - n\alpha + \gamma$ par des segments dont les sommets appartiennent à un réseau carré. Cette approximation définit donc une suite sturmienne sur l'alphabet $\{2, 3\}$. En utilisant le même raisonnement : on a donc, soit $b \in \mathbb{Z}^*$, b fixé, $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \forall (n', m') \in \mathbb{Z}^2$ on a $||H_{n,m} - H_{n,b+m}| - |H_{n',m'} - H_{n',b+m'}|| \leq 1$.

Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 3.1 (Équilibre géométrique) *Soient la surface plissée $S_{\mathcal{P}}$ et la hauteur des faces isolées de type E_3 donnée par $H_{n,m}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$, $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \forall (n', m') \in \mathbb{Z}^2$ on a*

$$||H_{n,m} - H_{a+n,b+m}| - |H_{n',m'} - H_{a+n',b+m'}|| \leq 1.$$

Démonstration. On calcule la hauteur $H_{n,m}$ des faces avec $n = ka$ et $m = kb$, $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on considère l'approximation dans le plan $(o, a\vec{e_1} + b\vec{e_2}, \vec{e_3})$ de la droite $\mathcal{D}$ donnée par l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec le plan $(o, a\vec{e_1} + b\vec{e_2}, \vec{e_3})$. La droite $\mathcal{D}$ a pour équation dans le repère $(o, (a\vec{e_1} + b\vec{e_2})/\sqrt{a^2 + b^2}, \vec{e_3})$: $z = h(-\alpha a - \beta b)/\sqrt{a^2 + b^2} + \gamma$. La position des faces de type E_3 est donnée par l'approximation de la droite $\mathcal{D}$ par un réseau de mailles rectangulaires (de coté 1 et de largeur $\sqrt{a^2 + b^2}$). Cette approximation de la droite $\mathcal{D}$ est donnée par une suite de billard rectangulaire (de coté 1 et de largeur $\sqrt{a^2 + b^2}$). Il faut vérifier que la droite $\mathcal{D}$ a une pente irrationnelle. Par une translation, on fait passer la droite par l'origine et l'on suppose qu'elle coupe le réseau au point $(l_1\sqrt{a^2 + b^2}, l_2)$ avec $(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$. Alors $l_2 = l_1\sqrt{a^2 + b^2}(-\alpha a - \beta b)/\sqrt{a^2 + b^2}$, donc $\alpha a + \beta b + l_2/l_1 = 0$; il y a contradiction avec le fait que $(1, \alpha, \beta)$ soient rationnellement indépendants. L'approximation de la droite $\mathcal{D}$ par le réseau rectangulaire définit donc une suite sturmienne. En particulier le corollaire 2.2 s'applique : $\forall d \in \mathbb{Z}^*, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2, ||H_{k_1 a, k_1 b} - H_{k_1 a + da, k_1 b + db}| - |H_{k_2 a, k_2 b} - H_{k_2 a + da, k_2 b + db}|| \leq 1$.

On peut refaire la même construction en écrivant l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ donnée par l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de $((m, n, 0), a\vec{e_1} + b\vec{e_2}, \vec{e_3})$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Cela donne dans le plan $((m, n, 0), (a\vec{e_1} + b\vec{e_2})/\sqrt{a^2 + b^2}, \vec{e_3})$ une droite $\mathcal{D}'$ de pente $(-\alpha a - \beta b)/\sqrt{a^2 + b^2}$ dont on fait

Figure 3 : pavage du plan et orientation.

l'approximation dans un réseau de mailles rectangulaires (de coté 1 et de largeur $\sqrt{a^2+b^2}$). Toutes les suites de billard rectangulaire de même pente définissent le même langage. Donc, d'après la première partie du raisonnement : soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^{*2}$, $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \forall (n',m') \in \mathbb{Z}^2$ on a $||H_{n,m} - H_{a+n,b+m}| - |H_{n',m'} - H_{a+n',b+m'}|| \leq 1$. $\diamondsuit$

3.3 Projection de la surface plissée $S_{\mathcal{P}}$ sur un plan et orientation.

Soit π la projection selon la direction $(1,1,1)$ sur le plan Π : $x+y+z=0$. En projetant par π l'approximation de plan $S_{\mathcal{P}}$, on obtient un pavage du plan Π par trois types de losanges (la projection $\pi(E_i)$ des trois faces E_i pour i=1,2 et 3). Nous appelons $\pi(S_{\mathcal{P}})$ le pavage du plan Π provenant de la projection de l'approximation de plan $S_{\mathcal{P}}$.
Nous devons ensuite orienter le plan Π et donc le pavage. Soit $\vec{i} = \pi(\vec{e_1} + \vec{e_2})$. ($\vec{i}$ est de direction parallèle à la petite diagonale du losange $\pi(E_3)$). Soit $\vec{j} = \pi(\vec{e_2})$. L'origine sur le plan Π est donnée par le point $o' = \pi(o)$. Nous orientons le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ par la base $(o', \vec{i}, \vec{j})$ (figure 3).

3.4 Construction de la suite double, associée à la surface plissée $S_{\mathcal{P}}$, par codage du pavage du plan.

Définition 3.1 Les triangles dont les sommets forment le réseau de triangles équilatéraux sont appelés *triangles unités*.

Définition 3.2 On appelle *triangle unité pointant "vers le haut"* les triangles unités dont les sommets ont pour coordonnées $(i,j), (i+1,j)$ et $(i,j+1), \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2$ dans le repère $(o', \vec{i}, \vec{j})$.

Figure 4 : exemple de fenêtres de base 1 à 3.

Définition 3.3 On appelle *triangle unité pointant "vers le bas"* les triangles unités dont les sommets ont pour coordonnées $(i,j),(i+1,j)$ et $(i+1,j-1), \forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$ dans le repère $(o', \vec{i}, \vec{j})$

Définition 3.4 On appelle *fenêtre triangulaire de base n*, un triangle équilatéral contenant n^2 triangles unités et dont la base est formée de n triangles unités "pointant vers le haut" (i.e. un triangle dont les sommets ont pour coordonnés $(i,j),(i+n,j)$ et $(i,j+n), \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2$ dans le repère $(o', \vec{i}, \vec{j})$) (voir la figure 4).

Définition 3.5 On appelle *fenêtre en forme de parallélogramme de base m et hauteur n* un parallélogramme dont les sommets ont pour coordonnés $(i,j),(i+n,j),(i,j+m)$ et $(i+n,j+m), \forall (i,j) \in \mathbb{Z}^2$ dans le repère $(o', \vec{i}, \vec{j})$.

On peut faire la même construction avec un parallélogramme dont les sommets ont pour coordonnés $(i,j),(i+n,j),(i-n,j+m)$ et $(i,j+m)$.

3.4.1 Codage.

Chaque losange, provenant de la projection d'une face $\pi(E_i)$, est constitué de deux triangles unités, l'un pointant "vers le haut", l'autre pointant "vers le bas". On associe le codage selon le type (i) de la face E_i, en codant la valeur i sur le triangle unité pointant "vers le haut" (voir les figures 5 et figure 3).

Pour une construction directe de la suite double $U = (U_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ associée au codage de la surface plissée, on vérifie aisément que l'on peut utiliser la définition suivante :

$$U = \begin{cases} U_{n,m} = 3 & \text{pour } m = H_{0,0} - H_{i,i+n} + i, \text{ et } (n,i) \in \mathbb{Z}^2, \\ U_{n,m} = 2 & \text{pour } m = H_{0,0} - H_{i,i+n} + i + 1, ..., H_{0,0} - H_{i,i+n+1} + i \text{ et } (n,i) \in \mathbb{Z}^2, \\ U_{n,m} = 1 & \text{pour } m = H_{0,0} - H_{i,i+n+1} + i + 1, ..., H_{0,0} - H_{i+1,i+n+1} + i \text{ et } (n,i) \in \mathbb{Z}^2. \end{cases}$$

Figure 5 : motif triangulaire de base 4 selon les deux représentations.

3.5 Fonctions de complexité et théorèmes.

Pour définir des fonctions de complexité et compter les différents arrangements de losanges (motifs généralisant la notion de mots pour une suite sur un indice) apparaissant sur le pavage du plan, on compte le nombre de motifs à l'aide de fenêtres. Nous étudions dans cet article des fenêtres triangulaires et en forme de parallélogramme. On peut aussi travailler au niveau de la suite double et définir le langage des motifs triangulaires et celui des motifs en forme de parallélogramme.

On note $L_{\triangle}(U,n)$ l'ensemble des motifs triangulaires de base n, n entier strictement positif, construit à partir de la suite double U :

$$L_{\triangle}(U,n) = \left\{ \begin{array}{llll} U_{i,j} & & & \\ U_{i-1,j} & U_{i-1,j+1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ U_{i-n+1,j} & U_{i-n+1,j+1} & \cdots & U_{i-n+1,j+n-1} \end{array} \quad \text{pour } (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

On note $L(U,n,m)$ l'ensemble des motifs en forme de parallélogramme de base m et de hauteur n construit à partir de la suite double U :

$$L(U,n,m) = \left\{ \begin{array}{llll} U_{i,j} & U_{i,j+1} & \cdots & U_{i,j+m-1} \\ U_{i-1,j} & U_{i-1,j+1} & \cdots & U_{i-1,j+m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{i-n+1,j} & U_{i-n+1,j+1} & \cdots & U_{i-n+1,j+m-1} \end{array} \quad \text{pour } (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

On note $P_{\triangle}(n)$ le nombre de motifs distincts sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ comptés à partir d'une fenêtre triangulaire de base n. On a $P_{\triangle}(n) =$ Card $L_{\triangle}(U,n)$

On note $P(n,m)$ le nombre de motifs distincts sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ comptés à partir d'une fenêtre en forme de parallélogramme (de hauteur n et base m). On a $P(n,m) =$ Card $L(U,n,m)$.

En utilisant ces fonctions de complexité, nous allons démontrer dans les sections suivantes les deux théorèmes :

Théorème 3.2 *Soient le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ et le codage sur l'alphabet $\{1,2,3\}$. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{\triangle}(n) = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Théorème 3.3 *Soient le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ et le codage sur l'alphabet $\{1,2,3\}$. Alors :*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ P(n,m) = nm+n+m.$$

3.6 Suite de complexité $2n+1$.

On s'intéresse maintenant à la projection de la surface plissée $\pi(S_P)$. On regarde les suites de direction parallèle à la petite diagonale de $\pi(E_3)$ (direction du vecteur $\vec{i}$). A partir de la suite $U = (U_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2)}$ sur deux indices, associée à l'approximation du plan $\mathcal{P}$, on considère la famille de suites (sur un indice) définie, à $l_0 \in \mathbb{Z}$ fixé, par $U^{(l_0)} = (U_{l_0,m})_{m\in\mathbb{Z}}$. Nous utiliserons la définition suivante : pour $l_0 \in \mathbb{Z}$ fixé, un mot x de longueur n appartenant à $L_n(U^{(l_0)})$ est *biprolongeable* à droite (respectivement à gauche) s'il existe deux lettres distinctes a et b telless que les mots xa et xb (respectivement ax et bx) appartiennent à $L_n(U^{(l_0)})$.

Proposition 3.4 *Les suites $U^{(l_0)}$, avec l_0 entier fixé, sont de complexité $p(n) = 2n+1, \forall n \in \mathbb{N}$ et définissent le même langage ($\forall k \in \mathbb{N}, \forall (l_0,l_1) \in \mathbb{Z}^2\ : L_k(U^{(l_0)}) = L_k(U^{(l_1)})$)*

Pour la démonstration de cette proposition, nous allons utiliser les trois lemmes suivants.

Lemme 3.5 *La suite $U^{(l_0)}$, avec l_0 entier fixé, a pour chaque longueur entière n au plus deux mots de longueur n biprolongeables à droite. Comme $p(1) = 3$ alors la suite est de complexité inférieure ou égale à $2n+1$.*

Lemme 3.6 *La suite $U^{(l_0)}$, avec l_0 entier fixé, a pour chaque longueur entière n au moins deux mots de longueur n biprolongeables à droite. Comme $p(1) = 3$ alors la suite est de complexité supérieure ou égale à $2n+1$.*

Lemme 3.7 *Quel que soit n entier, les suites $U^{(n)}$ ont le même langage.*

Démonstration du lemme 3.5. La suite $U^{(l_0)}$, à l_0 fixé, est formée de la concaténation de mots de la forme $(32^{d2}1^{d1})$ où $d1$ prend deux valeurs $\lceil \alpha - 1 \rceil$ ou $\lceil \alpha - 1 \rceil + 1$ et $d2$ prend deux valeurs $\lceil \beta - 1 \rceil$ ou $\lceil \beta - 1 \rceil + 1$. Ces valeurs $d2$ et $d1$ proviennent respectivement de la distance entre deux 3 consécutifs de la suite sturmienne sur l'alphabet $\{2,3\}$ et de la distance entre deux 3 consécutifs de la suite sturmienne sur l'alphabet $\{1,3\}$

On a donc les prolongements :

$$3 \to 2$$

$$2 \to 2 \mid 1$$

$$1 \to 1 \mid 3$$

et

$$1 \leftarrow 3$$

$$2 \mid 3 \leftarrow 2$$

$$1 \mid 2 \leftarrow 1$$

où $x \rightarrow y$ exprime : à droite du symbole x on a le symbole y, où $x \leftarrow y$ exprime : à gauche du symbole y on a le symbole x. La barre verticale exprime le "ou inclusif". Ainsi $x \rightarrow y \mid z$ signifie : à droite du symbole x on a soit le symbole y, soit le symbole z.

Il faut remarquer préalablement que la suite $U^{(l_0)}$, à l_0 fixé, est formée de la concaténation de mots de la forme $(32^{d2}1^{d1})$. Supposons que le mot a facteur de la suite se biprolonge à droite par 1 et 3. Les mots $a1$ et $a3$ appartiennent au langage de la suite. Nous allons montrer que le mot $a13$ appartient au langage. Premier cas: a est composé uniquement de 1. Le mot $a1$ étant prolongeable, il est suivi de 1 ou de 3. S'il est suivi de 3 alors c'est fini, sinon le mot $a11$ appartient au langage et il est prolongeable. Comme la suite est la concaténation de mots de la forme $(32^{d2}1^{d1})$, le nombre de 1 consécutif est borné. Le mot $a1...13$ appartient au langage et donc le mot $a13$ appartient au langage. Deuxième cas: a n'est pas composé que de 1; il s'écrit $a = y2z$ (avec z un mot composé que de 1). Comme $a1$ et $a3$ appartiennent au langage, les mots $b2c1$ et $b2c3$ aussi. Nous savons de plus que la suite est la concaténation de mots de la forme $(32^{d2}1^{d1})$ et $d1$ prend exactement deux valeurs consécutives. Le mot $b2c1$ étant prolongeable, il est suivi de 1 ou de 3. S'il est suivi de 1 le mot $b2c11$ apparaît. Il y a contradiction car $d1$ ne prend que deux valeurs consécutives (ici $d1$ prend la valeur $|c|$ et $|c11|$). Donc le mot $b2c1$ est suivi de 3. Le mot $a13$ appartient au langage. Le même genre de raisonnement permet de voir que si $a1$ et $a2$ sont facteurs de la suite, alors $a21$ aussi; si $2a$ et $3a$ sont facteurs de la suite, alors $32a$ aussi; enfin, si $1a$ et $2a$ sont facteurs de la suite, alors $21a$ aussi.

Nous allons montrer dans ce premier lemme que pour l_0 fixé, $U^{(l_0)}$ a pour chaque longueur entière n au plus deux mots de longueur n biprolongeables.

D'après les règles de prolongement, on ne peut avoir un mot triprolongeable.
Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe trois mots u, v, w de longueur n, deux à deux différents, biprolongeables à droite. Soit n_0 le plus petit des n tel que l'on ait trois mots distincts biprolongeables. D'après les règles de prolongement, deux d'entre eux se biprolongent à droite de la même façon. Supposons u, v biprolongés à droite de la même façon.

Cas (a) : u et v se biprolongent à droite par 1 et 3; et w se biprolonge à droite par 2 et 3. Comme n_0 est le plus petit des n tels que l'on ait trois mots distincts biprolongeables, le suffixe de longueur $n_0 - 1$ de u et de v sont égaux (on note a ce suffixe). Les mots u et v s'écrivent donc $u = y_1a$ et $v = y_2a$ où y_1 et y_2 sont des lettres distinctes (les mots u et w ne peuvent avoir un suffixe en commun puisque u finit par 1 et w par 2). D'où a est un mot biprolongeable à gauche.

Cas (a)(a) : a se biprolonge à gauche par 2 et 3. D'où, supposons $u = 2a$ et $v = 3a$ alors d'après les remarques préalables, les mots $v3 = 3a3$ et $3u13 = 32a13$ sont facteurs de la suite. De plus le nombre de 3 dans $3a3$ et $32a13$ est le même. Les 3 représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Il existe donc $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|a3|_3,m'+|a3|_3}| = |a3| - |a3|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que :
$|H_{n'',m''} - H_{n''+|a3|_3,m''+|a3|_3}| = |2a13| - |a3|_3$ alors :
$||H_{n',m'} - H_{n'+|a3|_3,m'+|a3|_3}| - |H_{n'',m''} - H_{n''+|a3|_3,m''+|a3|_3}|| = 2$. Il y a donc contradiction avec la propriété fondamentale.

Cas (a)(b) : a se biprolonge à gauche par 1 et 2. Supposons $u = 1a$ et $v = 2a$ alors les $v3 = 2a3$ et $u13 = 1a13$ sont facteurs de la suite. D'où $v3 = 2a3$ et $2u13 = 21a13$ sont des facteurs de la suite. Lorsque l'on a le mot 21 comme facteur de la suite $U^{(l_0)}$, cela implique qu'il existe j entier tel que $U_{l_0,j} = 2$ et $U_{l_0,j+1} = 1$. Comme la suite provient de la projection de la surface plissée, on a $U_{l_0+1,j} = 3$. Nous dirons qu'il y a un 3 sur la ligne du dessus entre le 2 et le 1. Les 3 représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|a|_3+1,m'+|a|_3}| = |a| - |a|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'',m''} - H_{n''+|a|_3+1,m''+|a|_3}| = |1a1| - |a|_3$ alors $||H_{n',m'} - H_{n'+|a|_3+1,m'+|a|_3}| - |H_{n'',m''} - H_{n''+|a|_3+1,m''+|a|_3}|| = 2$. Il y a donc contradiction avec la propriété fondamentale.

Cas (b) : u et v se biprolongent à droite par 2 et 1. Comme n_0 est le plus petit des n tels que l'on ait trois mots distincts biprolongeables : $u = l_1a$ et $v = l_2a$ où l_1 et l_2 sont des lettres. D'où a est un mot biprolongeable à gauche.

Cas (b)(a) : a se biprolonge à gauche par 2 et 3. Supposons $u = 2a$ et $v = 3a$ alors il existe $v1 = 3a1$ et $3u21 = 32a21$. De plus le nombre de 3 dans $3a1$ et $32a21$ est le même. Lorsque l'on a 21, cela implique qu'il y a un 3 sur la ligne du dessus entre le 2 et le 1. Les 3 représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|a|_3,m'+|a|_3+1}| = |a| - |a|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'',m''} - H_{n''+|a|_3,m''+|a|_3+1}| = |2a2| - |a|_3$ alors $||H_{n',m'} - H_{n'+|a|_3,m'+|a|_3+1}| - |H_{n'',m''} - H_{n''+|a|_3,m''+|a|_3+1}|| = 2$. Il y a donc contradiction avec la propriété fondamentale.

Cas (b)(b) : a se biprolonge à gauche par 1 et 2. Supposons $u = 1a$ et $v = 2a$ (avec le choix $v = 1a$ et $u = 2a$ on a les même mots : $1a2, 2a2, 1a1, 2a1$) alors il existe $v1 = 2a1$ et $2u21 = 21a21$. D'où $v1 = 2a1$ et $2u21 = 21a21$ sont des facteurs de la suite. Lorsque l'on a 21, cela implique qu'il y a un 3 sur la ligne du dessus entre le 2 et le 1. Les trois représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|a|_3,m'+|a|_3}| = |a| - |a|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'',m''} - H_{n''+|a|_3,m''+|a|_3}| = |1a2| - |a|_3$ alors $||H_{n',m'} - H_{n'+|a|_3,m'+|a|_3}| - |H_{n'',m''} - H_{n''+|a|_3,m''+|a|_3}|| = 2$. Il y a donc contradiction avec la propriété fondamentale.

D'où $U^{(l_0)}$ est une suite dont la complexité est inférieure ou égale à $2n + 1$. ♢

Démonstration du lemme 3.6. Nous allons montrer qu'il y a égalité à l_0 fixé. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un n tel que la complexité soit inférieure strictement à $2n+1$. Soit n_0 le plus petit de ces n, alors $p(n_0+1)-p(n_0)=1$.

Cas (c) : il existe $n > n_0$ tel que $p(n+1)-p(n)=2$. Soit n_1 le plus petit de ces n.

Cas (c)(a) : parmi les mots de longueur supérieure à n_0 et inférieure à n_1, il en existe un seul pour chaque longueur biprolongeable à droite par 1 et 3.

Supposons qu'il existe deux mots u et v de longueur n_1 biprolongeables à droite respectivement par 1 et 3, et par 2 et 1. Les mots $u2$ et $u1$ apparaissent dans le langage. Or les suffixes de ces mots apparaissent dans le langage. Il y a donc contradiction avec le fait que pour les mots de longueur supérieure à n_0 et inférieure à n_1, il en existe un seul biprolongeable à droite par 1 et 3.

Supposons qu'il existe deux mots u et v de longueur n_1 biprolongeables à droite par 1 et 3. D'après le cas (a)(a), il y a contradiction avec la propriété fondamentale.

Cas (c)(b) : parmi les mots de longueur supérieure à n_0 et inférieure à n_1, il en existe un seul biprolongeable à droite par 2 et 1.

En utilisant le raisonnement ci-dessus et en échangeant le rôle de 1,3 et 2,1; on arrive aux mêmes contradictions.

Cas (d) : quel que soit $n > n_0,\ p(n+1)-p(n)=1$.

Cas (d)(a) : parmi les mots de longueur supérieure à n_0, il en existe un seul pour chaque longueur biprolongeable à droite par 1 et 3. En particulier, il existe un mot u de longueur n_0-2 biprolongeable à droite par 2 et 1, donnant exactement deux mots de la forme $au2$ et $bu1$.

Supposons $a=2,\ b=3$ cela donne deux mots $32u21$ et $3u1$ déjà étudiés dans le cas (b)(a). Il y a contradiction avec la propriété fondamentale.

Supposons $a=1,\ b=2$ cela donne deux mots $21u21$ et $2u1$ déjà étudiés dans le cas (b)(b). Il y a contradiction avec la propriété fondamentale.

Supposons $a=3,\ b=2$ cela donne deux mots $3u21$ et $32u1$. Lorsque l'on a 21 cela implique qu'il y a un 3 sur la ligne du dessus entre le 2 et le 1. Les 3 représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n',m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|u2|_3,m'+|u2|_3+1}| = |u2| - |u|_3$ et il existe $(n'',m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que :
$|H_{n'',m''} - H_{n''+|2u|_3,m''+|2u|_3+1}| = |2u| - |u|_3$. Comme la place des 3 est donnée par l'approximation d'une droite dans un réseau, cela implique que la quantité $|H_{n,m} - H_{n+a,m+b}|$, avec a et b fixés, prend exactement deux valeurs. Il y a donc contradiction.

Supposons $a=2,\ b=1$ cela donne deux mots $2u21$ et $21u1$. Lorsque l'on a 21, cela implique qu'il y a un 3 sur la ligne du dessus entre le 2 et le 1. Les 3 représentent

des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|u|_3,m'+|u|_3}| = |u2| - |u|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'',m''} - H_{n''+|u|_3,m''+|u|_3}| = |1u| - |u|_3$. Comme la place des 3 est donnée par l'approximation d'une droite dans un réseau, cela implique que la quantité $|H_{n,m} - H_{n+a,m+b}|$, avec a et b fixés, prend exactement deux valeurs. Il y a donc contradiction.

Cas (d)(b) : parmi les mots de longueur supérieure à n_0, il en existe un seul pour chaque longueur biprolongeable à droite par 2 et 1. En particulier, il existe un mot u de longueur $n_0 - 2$ biprolongeable à droite par 3 et 1, donnant des mots de la forme $au3$ et $bu1$.

Supposons $a = 2,\ b = 3$ cela donne deux mots $32u13$ et $3u3$ déjà étudiés dans le cas (a)(a). Il y a contradiction avec la propriété fondamentale.

Supposons $a = 1,\ b = 2$ cela donne deux mots $21u13$ et $2u3$ déjà étudiés dans le cas (a)(b). Il y a contradiction avec la propriété fondamentale.

Supposons $a = 3,\ b = 2$ cela donne deux mots $3u13$ et $32u3$. Les 3 représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|3u|_3,m'+|3u|_3}| = |u1| - |u|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'',m''} - H_{n''+|u3|_3,m''+|u3|_3}| = |2u| - |u|_3$. Comme la place des 3 est donnée par l'approximation d'une droite dans un réseau, cela implique que la quantité $|H_{n,m} - H_{n+a,m+b}|$, avec a et b fixés, prend exactement deux valeurs. Il y a donc contradiction.

Supposons $a = 2,\ b = 1$ cela donne deux mots $2u13$ et $21u3$. Lorsque l'on a 21 cela implique qu'il y a un 3 sur la ligne du dessus entre le 2 et le 1. Les 3 représentent des faces de type E_3 dans l'approximation du plan $\mathcal{P}$. Donc il existe $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n',m'} - H_{n'+|u13|_3+1,m'+|u13|_3}| = |u1| - |u|_3$ et il existe $(n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que :
$|H_{n'',m''} - H_{n''+|1u3|_3+1,m''+|1u3|_3}| = |1u| - |u|_3$. Comme la place des 3 est donnée par l'approximation d'une droite dans un réseau, cela implique que la quantité $|H_{n,m} - H_{n+a,m+b}|$, avec a et b fixés, prend exactement deux valeurs. Il y a donc contradiction. ♢

Démonstration du lemme 3.7.

Il reste à montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{Z}$, les suites $U^{(m)}$ ont le même langage.
Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe deux suites $U^{(m)}, U^{(m')}$ n'ayant pas le même langage. Soit n_0, le plus petit des n tel qu'il existe $(m, m') \in \mathbb{Z}^2, L^{n_0}(U^{(m)}) \neq L^{n_0}(U^{(m')})$. Nous avons donc $L^{n_0-1}(U^{(m)}) = L^{n_0-1}(U^{(m')})$.

Cas (e) : il existe deux mots u et v de longueur $n_0 - 1$ se prolongeant à droite par 1 et 3. On a les propriétés suivantes : u et v appartiennent au langage des suites $U^{(m)}$ et $U^{(m')}$; ils diffèrent sur la première lettre.

Supposons que $u = 2w$ et $v = 3w$ ou bien que $u = 3w$ et $v = 2w$. Alors les quatre mots $2w1, 3w1, 2w3$ et $3w3$ apparaissent dans l'union des langages. D'après le cas (a)(a), il y a contradiction.

Supposons que $u = 2w$ et $v = 1w$ ou bien $u = 1w$ et $v = 2w$. Alors les quatre mots $2w1, 1w1, 2w3$ et $1w3$ apparaissent dans l'union des langages. D'après le cas (a)(b), il y a contradiction.

Cas (f) : il existe deux mots u et v de longueur $n_0 - 1$ se prolongeant à droite par 2 et 1. On a les propriétés suivantes : u et v appartiennent au langage des suites $U^{(m)}$ et $U^{(m')}$; ils différent sur la première lettre.

Supposons que $u = 2w$ et $v = 3w$ ou bien que $u = 3w$ et $v = 2w$. Alors les quatre mots $2w2, 3w2, 2w1$ et $3w1$ apparaissent dans l'union des langages. D'après le cas (b)(a), il y a contradiction.
Supposons que $u = 2w$ et $v = 1w$ ou bien que $u = 1w$ et $v = 2w$. Alors les quatre mots $2w2, 1w2, 2w1$ et $1w1$ apparaissent dans l'union des langages. D'après le cas (b)(b), il y a contradiction.

On en déduit que les suites $U^{(m)}$ ont le même langage. ♢

4 Motifs triangulaires et prolongements.

Définition 4.1 Un motif triangulaire de base n,

$$T = \begin{array}{ccc} T_{0,0} & & \\ \vdots & \ddots & \\ T_{-n+1,0} & \cdots & T_{-n+1,n-1} \end{array}$$

avec $T_{i,j}$ appartenant à l'alphabet de la suite double, est dit *facteur* de la suite double U s'il existe i, j entiers tels que $T_{k,l} = U_{i+k,j+l}$ pour $-n+1 \leq k \leq 0$ et $0 \leq l \leq -k$.

Définition 4.2 Un motif triangulaire de base n,

$$T = \begin{array}{ccc} T_{0,0} & & \\ \vdots & \ddots & \\ T_{-n+1,0} & \cdots & T_{-n+1,n-1} \end{array}$$

avec $T_{i,j}$ appartenant à l'alphabet de la suite double, est dit *prolongeable* s'il existe un mot $x = x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$ de longueur $n+1$ tel qu'il existe i, j entiers avec

$$\begin{array}{ccccc} T_{0,0} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ T_{-n+1,0} & \cdots & T_{-n+1,n-1} & & \\ x_1 & \cdots & x_n & x_{n+1} & \end{array} = \begin{array}{ccccc} U_{i,j} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ U_{i-n+1,j} & \cdots & U_{i-n+1,j+n-1} & & \\ U_{i-n,j} & \cdots & U_{i-n,j+n-1} & & U_{i-n,j+n} \end{array}$$

Le motif triangulaire prolongé sera noté $\frac{T}{x}$.

Définition 4.3 Un motif triangulaire T est dit *biprolongeable* s'il existe deux mots $x = x_1x_2\cdots x_{n+1}$ et $y = y_1y_2\cdots y_{n+1}$ de longueur $n+1$ tels que $\frac{T}{x}$ et $\frac{T}{y}$ sont facteurs de la suite double.

De même, on définit un motif k *prolongeable* s'il existe k mots distincts qui le prolongent. On parlera de motifs *multiprolongeables* pour des motifs k-prolongeables avec $k > 2$.

Considérons un motif triangulaire A de base n biprolongeable. S'il se prolonge par deux facteurs x et y de longueur $n+1$ de la suite $U^{(m)}$: $x = u32v, y = u13v$ si $|u| = i$, $0 \leq i \leq n-1$. On dit que les deux mots *diffèrent d'un cube en place* $i+1$.

si $x = 2v, y = 3v$, les deux mots diffèrent d'un cube en place 0.

si $x = u3, y = u1$, les deux mots diffèrent d'un cube en place $n+1$.

Définition 4.4 Un motif triangulaire de base n est dit *biprolongeable en place* i, $0 \leq i \leq n+1$, s'il se prolonge par deux mots qui diffèrent d'un cube en place i.

4.1 motifs triangulaires multiprolongeables.

Les motifs triangulaires de ce paragraphe comportent au moins un 3. Ils sont appelés motifs non dégénérés. Les losanges codés par le symbole 3 ont un rôle important à cause du sens de prolongement des motifs triangulaires (on peut remarquer l'existence de deux autres sens de prolongement des motifs triangulaires, disons vers le haut à gauche et vers le haut à droite).

Lemme 4.1 *Un motif triangulaire A ne peut être biprolongeable en place i et j, $i \neq j$ simultanément, autrement dit le motif ne peut se prolonger par les quatre mots $u32v32w$, $u32v13w$, $u13v32w$ et $u13v13w$.*

Démonstration. Supposons que le motif A se prolonge avec les mots

$$u32v32w$$

$$u32v13w$$

$$u13v32w$$

$$u13v13w.$$

Cela implique qu'il y a deux mots $32v$ et $13v$ de longueur $2 + |v|$ facteurs de la suite $U^{(m)}$ qui se prolongent à droite par 1 et 3. Comme la suite $U^{(m)}$ est de complexité $2n+1$, avec exactement deux mots de longueur $2 + |v|$ biprolongeables à droite par 1,3 et 2,1, il y a contradiction. De façon plus géométrique : les 3 représentent des faces dont la hauteur est calculée sur la diagonale du réseau $\mathbb{Z}^2$. Il existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2$, tel que le motif triangulaire se prolongeant par $u32v13w$ apparaisse dans la projection de l'approximation. Il existe $(n_0', m_0') \in \mathbb{Z}^2$ tel que le motif triangulaire se prolongeant par $u13v32w$ apparaisse dans la projection de l'approximation. La différence des hauteurs :

$$||H_{n_0,m_0} - H_{n_0+|2v13|_3,m_0+|2v13|_3}| - |H_{n_0',m_0'} - H_{n_0'+|2v13|_3,m_0'+|2v13|_3}|| = |v| - |2v1|$$

est supérieure à 1. On obtient donc une contradiction avec la propriété fondamentale. $\diamondsuit$

Il existe des motifs A biprolongeables en place i, j non simultanément : c'est-à-dire parmi les quatre mots $u32v32w$, $u32v13w$, $u13v32w$ et $u13v13w$, soit le mot $u13v32w$ n'existe pas soit le mot $u32v13w$ n'existe pas. Cela implique que le motif A est triprolongeable. La contribution à la différence $P_\triangle(n+1) - P_\triangle(n)$ d'un tel motif est 2.

Lemme 4.2 *Il existe des motifs A biprolongeables en place $i_0, \cdots, i_j$, non simultanément, le motif A est alors $j+2$ prolongeable. La contribution à la différence $P_\triangle(n+1) - P_\triangle(n)$ de tels motifs est $j+1$.*

Démonstration. Les places i_k sont supposées être rangées par ordre croissant. Le motif A se prolonge par des mots w de la forme :

$$w = v_0 {M_0}^{(w)} v_1 {M_1}^{(w)} \cdots v_j {M_j}^{(w)} v_{j+1}$$

où les v_i sont des facteurs éventuellement vide de la suite $U^{(m)}$ et où les ${M_k}^{(w)}$ sont des mots de deux lettres de la forme 32 ou 13, symbolisant le biprolongement en place i_k.

Pour plus de clarté, on recode le mots 32 par V et le mot 13 par F. Nous utiliserons les conventions suivantes :
si ${M_k}^{(w)} = V$ alors $\overline{{M_k}^{(w)}} = F$,
si ${M_k}^{(w)} = F$ alors $\overline{{M_k}^{(w)}} = V$.
Comme le motif A est biprolongeable en place i_k, nous recherchons les mots u et v de la forme :

$$u = v_0 {M_0}^{(u)} v_1 {M_1}^{(u)} \cdots v_k {M_k}^{(u)} \cdots v_j {M_j}^{(u)} v_{j+1}$$
$$v = v_0 {M_0}^{(u)} v_1 {M_1}^{(u)} \cdots v_k \overline{{M_k}^{(u)}} \cdots v_j {M_j}^{(u)} v_{j+1}$$

pour tout $k, 0 \leq k \leq j$.

D'après le lemme 4.1 on a les contraintes suivantes sur les M_k : pour chaque k et k', $0 \leq k < k' \leq j$,
on a soit l'ensemble de contraintes C_1

$${M_k}^{(w)} = V,\ {M_{k'}}^{(w)} = V$$
$${M_k}^{(u)} = V,\ {M_{k'}}^{(u)} = F$$
$${M_k}^{(v)} = F,\ {M_{k'}}^{(v)} = F$$

et donc ${M_k}^{(t)} = F,\ {M_{k'}}^{(t)} = V$ n'existe pas;

soit l'ensemble de contraintes C_2

$${M_k}^{(v)} = F,\ {M_{k'}}^{(v)} = F$$
$${M_k}^{(u)} = F,\ {M_{k'}}^{(u)} = V$$

$$M_k{}^{(w)} = V,\ M_{k'}{}^{(w)} = V$$

et donc $M_k{}^{(t)} = V,\ M_{k'}{}^{(t)} = F$ n'existe pas.

Raisonnons par l'absurde : supposons que l'on puisse, à partir du mot u_1 effectuer les trois transformations suivantes :

$$u_1 = uM_i{}^{(u_1)}vM_j{}^{(u_1)}lM_k{}^{(u_1)}m$$
$$u_2 = u\overline{M_i{}^{(u_1)}}vM_j{}^{(u_1)}lM_k{}^{(u_1)}m$$
$$u_3 = uM_i{}^{(u_1)}v\overline{M_j{}^{(u_1)}}lM_k{}^{(u_1)}m$$
$$u_4 = uM_i{}^{(u_1)}vM_j{}^{(u_1)}l\overline{M_k{}^{(u_1)}}m.$$

On a l'ensemble de contraintes C_1 ou C_2 en place i et j donc $M_i{}^{(u_1)} = V$ et $M_j{}^{(u_1)} = F$ ou bien $M_i{}^{(u_1)} = F$ et $M_j{}^{(u_1)} = V$. En effet si $M_i{}^{(u_1)} = M_j{}^{(u_1)}$, alors les mots VF et FV apparaissent et cela est impossible.

On a l'ensemble de contraintes C_1 ou C_2 en place j et k donc $M_i{}^{(u_1)} = V, M_j{}^{(u_1)} = F$ et $M_k{}^{(u_1)} = V$ ou bien $M_i{}^{(u_1)} = F, M_j{}^{(u_1)} = V$ et $M_k{}^{(u_1)} = F$. Cela est impossible car $M_i{}^{(u_1)} = M_k{}^{(u_1)}$.

Nous venons de montrer que l'on ne peut effectuer plus de deux transformations à deux places différentes pour un mot quelconque.

D'après les contraintes C_1 et C_2, les mots V^j et F^j de longueur j apparaissent. Supposons que l'on effectue deux transformations en place i et j :

$$u_1 = uM_i{}^{(u_1)}vM_j{}^{(u_1)}l$$
$$u_2 = u\overline{M_i{}^{(u_1)}}vM_j{}^{(u_1)}l$$
$$u_3 = uM_i{}^{(u_1)}v\overline{M_j{}^{(u_1)}}l.$$

Si $M_i{}^{(u_1)} = V$ et $M_j{}^{(u_1)} = V$ alors $\overline{M_i{}^{(u_1)}} = F$, $M_j{}^{(u_1)} = V$ et $M_i{}^{(u_1)} = V$, $\overline{M_j{}^{(u_1)}} = F$, il y a donc contradiction.

Si $M_i{}^{(u_1)} = F$ et $M_j{}^{(u_1)} = F$ alors $\overline{M_i{}^{(u_1)}} = V$, $M_j{}^{(u_1)} = F$ et $M_i{}^{(u_1)} = F$, $\overline{M_j{}^{(u_1)}} = V$, il y a donc contradiction.

Nous venons de montrer que l'on ne peut effectuer plus d'une transformation sur les mots V^j et F^j de longueur j.

Ces deux propriétés permettent de trouver de façon algorithmique les mots tels que A soit biprolongeable en place $i_0, \cdots, i_j$, non simultanément.

On utilise un tableau TAB de $j+1$ cases qui sert à stocker les transformations : $TAB(i) = k$ signifie que le mot numéro i a été transformé en place k pour donner le mot numéro $i+1$. On part du mot V^{j+1} d'où $M_i = V$, $\forall i$, $0 \leq i \leq j$. On choisit une place k_0 pour faire une transformation $TAB(0) = k_0$. On a donc le mot numéro 1 de la forme $M_i = V$ pour i différent de $TAB(0)$, et $M_{TAB(0)} = F$. A l'étape e, on choisit k_e différent des $TAB(i)$ pour i inférieur à e. On stocke la valeur k_e, c'est-à-dire $TAB(e) = k_e$. On transforme le mot numéro e en un mot numéro $e+1$ de la forme $M_l = V$ pour l différent de $TAB(i)$, pour i inférieur ou égal à e et $M_{TAB(i)} = F$, pour i inférieur ou égal à e. L'algorithme s'arrête lorsque l'on a transformé le mot numéro j (c'est-à-dire lorsque le tableau TAB est rempli).

Cet algorithme fournit $j+2$ mots différents avec la contrainte C_1 ou bien C_2 sur M_k et $M_{k'}$ pour chaque k et k', $0 \leq k < k' \leq j$.

En effet le tableau TAB contient une permutation de l'ensemble $\{0 \cdots j\}$. On a la contrainte C_1 entre M_k et $M_{k'}$ avec $k < k'$ si $TAB(k) = i$, $TAB(k') = i'$ et $i > i'$. On a la contrainte C_2 entre M_k et $M_{k'}$ avec $k < k'$ si $TAB(k) = i$, $TAB(k') = i'$ et $i < i'$.

Si l'algorithme s'arrête avant que TAB ne soit rempli, toutes les contraintes sur les places ne sont pas satisfaites et donc il existe des places où il n'y a pas de biprolongement.

Si l'on fait, après que l'algorithme est terminé, une nouvelle transformation sur un mot on introduit sur deux places différentes les contraintes C_1 et C_2 simultanément. Donc les mots FV et VF apparaissent, ce qui est impossible.

D'où le motif A est $j+2$ prolongeable et donc la contribution à la différence $P_\triangle(n+1) - P_\triangle(n)$ d'un tel motif est $j+1$. ♢

Lemme 4.3 *Soit A un motif triangulaire de base n biprolongeable en place i et soit B un motif triangulaire de base n biprolongeable en place i, alors A et B sont identiques.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux motifs distincts A et B ayant un biprolongement en place i. Premier cas, les motifs A et B diffèrent de la position d'au moins un symbole 3. Comme il y a un biprolongement en place i pour le motif A, alors il existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n_0,m_0} - H_{n_0+a,m_0+b}| = k$ et $(n'_0, m'_0) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'_0,m'_0} - H_{n'_0+a,m'_0+b}| = k+1$. Comme il y a un biprolongement en place i pour le motif B, alors il existe $(n_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n_1,m_1} - H_{n_1+a,m_1+b}| = k'$ et $(n'_1, m'_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|H_{n'_1,m'_1} - H_{n'_1+a,m'_1+b}| = k'+1$. Comme les motifs différent alors $k \neq k'$. Si $k = k'+1$, alors la quantité $|H_{n,m} - H_{n+a,m+b}|$ prend au moins les trois valeurs : k', $k'+1$ et $k'+2$. Si $k' = k+1$, alors la quantité $|H_{n,m} - H_{n+a,m+b}|$ prend au moins les trois valeurs : k, $k+1$ et $k+2$. Il y a donc contradiction avec la propriété fondamentale. Deuxième cas, les motifs A et B diffèrent uniquement sur la position des symboles 1 ou 2. Comme l'approximation du plan est entièrement déterminée par la position des symbole 3, cela implique que dans le voisinage des motifs, sur l'approximation du plan, la position d'au moins un symbole 3 diffère. On est donc ramené au cas précédent. ♢

4.2 Cas dégénérés.

Lorsque les motifs se multiprolongeant ont une base n supérieure ou égale à $\lceil\alpha-1\rceil+\lceil\beta-1\rceil+1$, ils contiennent au moins un 3. Donc ils se prolongent selon les cas ci-dessus.

Les cas dégénérés apparaissent lorsque les motifs qui se multiprolongent ne contiennent pas de 3.

Dans ce paragraphe, nous nous occupons uniquement des motifs dégénérés.

Il faut dans un premier temps remarquer qu'un motif dégénéré de base n se prolonge par les mots appartenant à l'ensemble de mots suivant : 1^{n+1}, $1^{n-k}32^k$ pour $k=0\cdots n$, 2^{n+1}. En effet si le facteur 21 apparaît dans le prolongement cela implique que le motif contient au moins un 3.

Supposons qu'il y ait des motifs non dégénérés se prolongeant aux places $i_{j_0}\cdots i_{j_{k-1}}$ avec $0\leq k\leq n+1$, alors la somme des contributions à la différence $P_\triangle(n+1)-P_\triangle(n)$ est k.

Les motifs dégénérés se prolongent en places $i_{j_k}\cdots i_{j_{n+1}}$ (les places sont rangées par ordre croissant).

S'il n'y a qu'un motif dégénéré et que les places sont contiguës ($i_{j_l}+1=i_{j_{l+1}}$), alors il y a $n+2-k$ places, d'où $n+2-k+1$ prolongements et donc une contribution de $n+2-k$.

S'il y a plusieurs motifs dégénérés et que pour chaque motif, les places sont contiguës, la contribution à la différence $P_\triangle(n+1)-P_\triangle(n)$ est la somme des contributions, c'est-à-dire $n+2-k$.

Il y a un problème lorsque pour un motif dégénéré, les places ne sont pas contiguës. Nous allons montrer que ce cas n'existe pas. Les motifs dégénérés sont composés uniquement de lignes de 1 ou de 2. En effet, si la ligne commence par une plage de 2 suivie d'un 1 alors un 3 apparaît sur la ligne du dessus, ce qui est impossible. Si une ligne commence par une plage de 1, les 1 sont suivis par 1 ou 3. Donc, pour que le motif soit dégénéré, il faut que la ligne ne soit composée que de 1.

Il faut remarquer (par le lemme 4.3) que deux motifs de base n se prolongeant à des places contiguës ont au moins un sous motif de base $n-1$ identique. De même si deux motifs se prolongent à des places distantes de k, ils ont au moins un sous motif de base $n-k$ identique.

Pour que le même motif de base n se prolonge à des places non contiguës i et $i+k$, il faut que le motif se prolongeant en place $i+1$ contienne au moins un 3. Supposons que ce 3 apparaisse sur l'élément le plus haut du motif. Pour retrouver le même motif dégénéré, il faut que le 3 soit suivi d'une plage de 2 puis d'une plage de 1 et que la ligne du dessous soit composée d'une plage de 2 et soit suivi d'une plage de 1 puis de 3 puis d'une plage de 2. La distance minimale entre l'élément le plus haut des motifs dégénérés (se prolongeant en place i et $i+k$) lorsque les sous motifs identiques sont juxtaposés est $\max(\lceil\alpha-1\rceil,\lceil\beta-1\rceil)+1$. Il y a donc multiprolongement pour le motif dégénéré si la base est supérieure à $\max(\lceil\alpha-1\rceil,\lceil\beta-1\rceil)+1$. D'où la somme des bases (lorsque les sous motifs identiques sont juxtaposés) est au moins supérieure à $2\times\max(\lceil\alpha-1\rceil,\lceil\beta-1\rceil)+2$. Or une ligne de longueur $\lceil\alpha-1\rceil+\lceil\beta-1\rceil+1$ contient au moins un 3 et donc le motif n'est pas dégénéré. Il y a donc contradiction avec le fait que l'on soit parti d'un motif dégénéré. Si le 3 n'apparaît pas sur l'élément le plus haut du motif se biprolongeant en place $i+1$, le

raisonnement est le même mais la distance entre l'élément le plus haut des motifs dégénéré est au moins augmentée de la distance de la ligne au sommet.

4.3 Démonstration des théorèmes 3.2 et 3.3.

Théorème 3.2 : *Soient le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ et le codage sur l'alphabet $\{1,2,3\}$. Alors :*

$$\forall n \in I\!N,\ P_{\triangle}(n) = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Démonstration. Comme $P_{\triangle}(1) = 3$, il suffit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{\triangle}(n+1) = P_{\triangle}(n) + n + 2.$$

Lorsque $n > \lceil \alpha - 1 \rceil + \lceil \beta - 1 \rceil$:

Premier cas : les motifs qui se biprolongent sont tous différents. Alors d'après le lemme 4.3, il y a $n+2$ motifs qui se biprolongent. Donc $P_{\triangle}(n+1) = P_{\triangle}(n) + n + 2$.

Deuxième cas : $k < n+2$ motifs se biprolongent et les motifs se multiprolongent en $n+2-k$ places. Alors, d'après le lemme 4.3 les motifs qui se biprolongent ont une contribution de k et d'après le lemme 4.2 les motifs qui se multiprolongent ont une contribution de $n+2-k$, d'où $P_{\triangle}(n+1) = P_{\triangle}(n) + n + 2$.

Lorsque $n \leq \lceil \alpha - 1 \rceil + \lceil \beta - 1 \rceil$:

Les motifs dégénérés se multiprolongent en $n+2-k$ places, leur contribution est $n+2-k$. Les motifs non dégénérés se multiprolongent en k places, leur contribution est k.
D'où $P_{\triangle}(n+1) = P_{\triangle}(n) + n + 2$. ♢

Théorème 3.3 : *Soient le pavage du plan $\pi(S_{\mathcal{P}})$ et le codage sur l'alphabet $\{1,2,3\}$. Alors :*

$$\forall (n,m) \in I\!N^2,\ P(n,m) = nm + n + m.$$

Comme nous travaillons, maintenant, sur des motifs en forme de parallélogramme, il faut adapter les définitions du paragraphe 4.

Définition 4.5 Un motif en forme de parallélogramme de base m et de hauteur n,

$$R = \begin{matrix} R_{0,0} & \cdots & R_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{-n+1,0} & \cdots & R_{-n+1,m-1} \end{matrix}$$

avec $R_{i,j}$ appartenant à l'alphabet de la suite double, est dit *facteur* de la suite double U s'il existe i,j entiers tels que $R_{k,l} = U_{i+k,j+l}$ pour $-n+1 \leq k \leq 0$ et $0 \leq l \leq m-1$.

Définition 4.6 Un motif en forme de parallélogramme,

$$R = \begin{array}{ccc} R_{0,0} & \cdots & R_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{-n+1,0} & \cdots & R_{-n+1,m-1} \end{array}$$

avec $R_{i,j}$ appartenant à l'alphabet de la suite double, est dit *prolongeable* s'il existe un mot $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ de longueur m tel qu'il existe i, j entiers avec

$$\begin{array}{ccc} R_{0,0} & \cdots & R_{0,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{-n+1,0} & \cdots & R_{-n+1,m-1} \\ x_1 & \cdots & x_m \end{array} = \begin{array}{ccc} U_{i,j} & \cdots & U_{i,j+m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{i-n+1,j} & \cdots & U_{i-n+1,j+m-1} \\ U_{i-n,j} & \cdots & U_{i-n,j+m-1} \end{array}$$

Le motif en forme de parallélogramme prolongé sera noté $\frac{R}{x}$.

Définition 4.7 Un motif en forme de parallélogramme R est dit *biprolongeable* s'il existe deux mots $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ et $y = y_1 y_2 \cdots y_m$ de longueur m tels que $\frac{T}{x}$ et $\frac{T}{y}$ sont facteurs de la suite double.

Considérons un motif en forme de parallélogramme R de base m et de hauteur n biprolongeable. S'il se prolonge par deux facteurs x et y de longueur m de la suite $U^{(k)}$: $x = u32v, y = u13v$ si $|u| = i,\ 0 \leq i \leq n-2$. On dit que les deux mots diffèrent d'un cube en place $i+1$.

si $x = 2v, y = 3v$, les deux mots diffèrent d'un cube en place 0.

si $x = u3, y = u1$, les deux mots diffèrent d'un cube en place m.

Définition 4.8 Un motif en forme de parallélogramme de base m et de hauteur n est dit *biprolongeable en place* i, $0 \leq i \leq m$, s'il se prolonge par deux mots qui diffèrent d'un cube en place i.

Démonstration du Théorème 3.3. d'après le paragraphe 2.6, $P(1, m) = 2m + 1, \forall m$, il suffit de montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ P(n+1, m) = P(n, m) + m + 1.$$

Le raisonnement sur les motifs triangulaires et leurs prolongements n'est fonction que de la base m du motif triangulaire. On peut donc refaire le même raisonnement avec des motifs en forme de parallélogramme de hauteur n et de base m, en utilisant les définitions ci-dessus. Comme les biprolongements s'effectuent en place $i, 0 \leq i \leq m$, la contribution des motifs de base m est $m + 1$ (indépendamment de la hauteur n du motif). D'où $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ P(n+1, m) = P(n, m) + m + 1$. ♢

Remerciements : je remercie P. Arnoux, V. Berthé, P. Hubert et G. Rauzy pour leurs précieux conseils ainsi que J.-P. Allouche pour de nombreuses discussions et pour m'avoir aidé à conjecturer le théorème 3.3. Je remercie également A. Messaoudi et I. Lucien pour leur soutien de tous les instants.

Bibliographie

[1] P. Alessandri. Codage des rotations. *Mémoire de D.E.A.,Université Claude Bernard, Lyon I*, 1993.

[2] J.-P. Allouche. Sur la complexité des suites infinies. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 1:133–143, 1994.

[3] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa and J. Tamura. Complexity of sequences defined by billiards in the cube. *Bull. Soc. math. France*, 122:1–12, 1994.

[4] P. Arnoux et G. Rauzy. Représentation géométrique de suites de complexité $2n + 1$. *Bull. Soc. math. France*, 119, 2:199–215, 1991.

[5] Y. Baryshnikov. Complexity of trajectories in rectangular billiards. *Commun. Math. Phys.*, 174:43–56, 1995.

[6] J. Berstel. Fibonacci words - A survey. *in: the book of L,* Springer Verlag, 1986.

[7] J. Berstel. Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés. *in: Mots, mélanges offerts à M.P. Schutzenberger*, éditions Hermes, 1987.

[8] N.G. de Bruijn. Algebraic theory of Penrose's non-periodic tiling of the plane. *Indag. Mathem.*, 1:201–220, 1990.

[9] E. M. Coven and G. A. Hedlund. Sequences with minimal block growth. *Math. Systems Theory*, 7, 2:138–153, 1973.

[10] G. A. Hedlund and M. Morse. Symbolic Dynamics. *Amer. J. Math.*, 60:815–866, 1938.

[11] G. A. Hedlund and M. Morse. Symbolic Dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:287–306, 1940.

[12] P. Hubert. Complexité de suites définies par des billards rationnels. *Bull. Soc. math. France*, 123:257–270, 1995.

[13] S. Ito and M. Kimura. On Rauzy fractal. *J. Indust. Appl. Math*, 8:461–486, 1991.

[14] F. Mignosi. On the number of factors of Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 82:71–84, 1991.

[15] G. Rauzy. Mots infinis en arithmétique. *Automata on infinite words, Lecture Notes in computer Science*, 192:165–171, 1985.

[16] M. Senechal. *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.